هو الله

# فارسی اقدس

## مقالهٔ اوّل

طبع فی مطبع
الناصری
بمبئی
۱۳۲۴

بسم الله الرحمن الرحیم

حمد و ستایش و تقدیس و نیایش فزون از اندازه حکیم صانع مهندسی را سزاست
که بکلک قدرت نظام قوام هیئت موجودات باشکال مختلفهٔ هندسیه
و صور متنوعهٔ بدیعیه بر سطح عالم ایجاد و الواح کائنات مرتسم و منتظم فرمود
و جمیع را بخلعت گرامی بدائع علوم و حکم و ظهورات صنائع و فنون در عالم
مزین نمود تا تجلیات حقائق حکمتیه و دقائق کمالات ذاتیه از حقیقت
انسانیه ظاهر شود و شقائق فوائد و قواعد صنعیه از حدائق افکار نفوس
زکیه بقدرت کامله چون ازهار لهای بوستانی از ارض وجود چهره نمایند
جلت قدرته و جمت نعمته و تعالت اثاره و کملت صنعه و احاطت فضائله
علی من فی السموات والارضین **اما بعد** چنین گوید بندهٔ ارباب صدق
علی محمد کشمیری که بر ضمیر منیر ارباب علم و دانش و خاطر خطیر اصحاب خرد
و بینش پوشیده نیست که (اقلیدس) یعنی علم هندسه کلید خزائن

علوم و حِکَم و گنجینهٔ طرق ترقیات اهل تمدّن و مایهٔ آسایش اُمم عالمست ))
هرگاه علم هندسه ضمیمهٔ تعلیمات نبودی این همه مقاصد عظیمهٔ انسان در پردهٔ خفا
مستور و محجوب ماندی و اهل جهان از فوائد این بحر و نتایج افکار دقیقهٔ انسانی بی‌بهره
و غیر مُنتفع بودی ))
مَثَلاً هرگاه علم هندسه نمی‌بود علم هیئت و علم مساحت و جغرافی و نیز بسیاری
از علوم مُفیدهٔ عالیه که هیئت انسانی بران محتاجند تکمیل نمی‌یافت چنانچه
حضرت مَولی الموالی در دبستان جهان چنین نُطق فرموده (( المهندسة للبنیان ))
ازینجاست که ارباب علم و حکمت گفته‌اند مادامیکه از علم هندسه اطلاع
و آگاهی نباشد بهرهٔ کافی از علوم مذکوره یا سرها حاصل نشود و بنیاد تحصیل تمدن
در عالم ایجاد مُستحکم و مُتقن نگردد ))
این مُختصر گنجایش این قدر ندارد که فوائد کثیرهٔ این علم شریف را برشمارد ))
هرچند برای انحلال دقائق اشکال اقلیدس افکار غیر صافیه مکفی نباشد ولکن
اساتید حکما و مُهندسین قائل برانند که خود علم اقلیدس برای قوای عقلیه بمنزلهٔ ورزش
قوی است لهذا هرگاه طالب العلم بدقیقهٔ از دقائق که حلّ آن بنظرش
دشوار آید برخورد خود را نبازد بلکه تعمّق نماید چه تعمّق در مطالب جهت
حلّ دقائق علیه مُعلّی است که مافوق آن مُتصوّر نبوده و نیست ))
مَثَلاً هرگاه از صد مرحلهٔ این علم یا سائر علوم مرحلهٔ از تدریس مُعلّم شفیق
طی شود قطعاً باقی مراحل از تعمّق طی و مُنحل خواهد بود ))
خوشا زمانیکه در مدارس ما مردم چنانچه در اقوام متمدن عالم متداول است

در ابتدای تعلیم‌ها درس و تدریس اقلیدس جاری و مرسوم گردد

اقلیدس نام حکیمی است معروف و از تجدید مستغنی گویند مولدش شهر (صور) که موضعی است بر ساحل بحر شام (یا بحر اوسط) ولکن بتحقیق رسیده که مدارج کمالات علیه را در ملکه (اسکندریه) طی نمود و یکی از تلامذه طبقه افلاطونی بوده — سیصد و چند سال پیش از ظهور حضرت مسیح افاده علوم را بخلق میفرمود — مصنفاتش بسیار منجمله در علم هندسه پانزده مقاله تحریر فرموده است

هرچند بعضی برانند که مصنف سیزده مقاله اول (حکیم ابلونیوس) بوده است علی ای حال اقلیدس حکیم علم هندسه را چنان ترتیب داده و تدوین نموده که بنام نامیش موسوم بحدیکه میان ارباب علوم و کمالات اقلیدس و علم هندسه بیک معنی مصطلح گردید

## شکل

اشکال را باعتبار نتائج دو نوع قرار داده قسمی را عملی و قسم دیگر را اثباتی نامیده است

مثلاً در مقاله اول شکل ۱ — ۲ — ۳ — ۹ — ۱۰ — ۱۱ — ۱۲ — ۲۲ — ۲۳ — ۳۱ — ۴۲ — ۴۴ — ۴۵ — ۴۶ — این چهارده شکل عملی و باقی را اثباتی نامیده است

امتیاز میان این دو قسم غیر از این نباشد که در تحت هر شکلی پاره معلومات است و از آن معلومات اصولیات که متعلق بخود آن شکل است دستگیر میشود

هرگاه این اصول که از معلومات شکلِ معلوم فیه مفهوم شده است اشاره نماید بسوی عمل بیان آن شکل را عملی گویند )

وهرگاه اصول مذکوره مبنی باشد بر مطلبی که در بحثِ شکلِ معلوم مقصود است آنرا شکل اثباتی گویند )

مثلاً در مقالهٔ اوّل شکلِ اوّل اصولِ ارتسامِ مثلث متساوی الاضلاع را می نماید )

ایضاً در مقالهٔ اوّل شکلِ دوّم قاعدهٔ بدست میدهد که از نقطهٔ معلوم خطی مساوی با خطِ مفروض خارج نمائیم )

ایضاً در مقالهٔ اوّل شکلِ سوّم اصولِ انقطاعِ مقدارِ خطِ اقصر را از خطِ اطول یاد میدهد این اشکال را عملی خوانده است )

واما شکل اثباتی =

مثلاً در مقالهٔ اوّل شکلِ چهارم اصولی بدست میدهد یعنی ثابت میکند که هرگاه دو ضلعِ مثلثی با دو ضلعِ مثلثِ دیگری متساوی باشد (بتفصیلی که در بحثِ آن شکل مذکور است) پس دو ضلعِ باقی هم از هر دو مثلث متساوی خواهند بود )

ایضاً در مقالهٔ اوّل شکلِ پنجم ثابت میکند که زوایای فوقِ قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین (بتفصیلی که در بحث مذکور است) باهم متساویند لهذا این طور اشکال را (اثباتی) گفته است )

اقلیدس پیش از تبیین مقالات جهت تفهیم مطالب هندسیه
قواعدی و اصطلاحاتی چند که مراد از آنها حدود — علوم متعارفه و
اصول موضوعه باشد و در مقالات تحتانی الیه است قرار داده و تسلیم نموده
که حفظ آن برای طالب علم انفع باشد و استفهام مقاصد اسهل ) —
از این اصول انواع مضامین که در مقالات ذکر شود دریافت گردد

## حدود

(۱) نقطه آن است که اجزا نداشته باشد یعنی مقدار نداشته باشد

(۲) خط فقط طول دارد بغیر عرض

هر چند نقطه و خط که مادّه باشد بی مقدار و بی عرض نا ممکن ولکن در اقلیدس منظور اینست
که ملحوظ نباشد یعنی نقطهٔ هندسیه مقام دارد مقدار ندارد ) —
کذلک خط هندسیه در عرض مقام دارد نه مقدار یعنی عرض ندارد ) —
مثلاً فرض کن دو پارچه سفیدی و رنگ سبزی واقع شده است پس آن حدیکه فاصل است
میان سفیدی و سبزی همان است خط هندسی که فضائی را یعنی چیزی را احاطه نکرده است

چه هرگاه چیزی را یعنی سطحی را در آن داخل سفید قابض باشد هر اینه ممکن است از انتقال
هر چه ریزه تر یا بخطی باریک تر از تار عنکبوت محدود و معین سازیم و حال آنکه نا ممکن است فرضاً
هرگاه آن حد را که فارق سفیدی و سبزی است بنقاط بسیار ریزه معین سازیم
مسلّم است خط مقسوط مذکوره از دو حال بیرون نخواهد بود
یا بر سطح سفیدی واقع شود و یا اینکه بر سطح سبزی ) —
در صورت اول جزو سطح سفیدی خواهد بود و در شق ثانی از اجزاء کل سبز محسوب ) —
از این وضاحت منتج شود که خط هندسی مقام دارد ولکن مقدار ندارد ) —
همین ثبوت برای نقطهٔ هندسیه هم کافی است که آنهم مقام دارد نه مقدار ) —
زیرا که اجزاء هر خط مرکب از نقاط است بر هرگاه مقداری یعنی جسمی برای نقطه منظور
باشد همان مقدار مسلسل برای خط هم باقی خواهد بود و حال آنکه مذکور شد
خط هندسیه عرض ندارد فلهذا برای جزو آنهم که نقطهٔ هندسیه باشد مقدار
نیست ) —

(۳) خط منتهی بنقطه میشود و آن نقطه را طرف گویند

(۴) خط مستقیم آن خط را گویند که در نقاط اطراف خود هموار باشد

پست وبلند نباشد

خط دو نوع است مستقیم ومنحنی = مستقیم آنست که چون از نقطهٔ ابتدائیهٔ خود متحرک وممتد شود سمت خود را تغییر ندهد چنانچه تعریف شد —
خط منحنی آنست که چون از نقطهٔ ابتدائیهٔ خود متحرک وممتد شود پیهم از سمت خود انحراف نماید مثلاً خط محیط دائره منحنی است

(۵) سطح آن بسیط را نامند که طول وعرض هردو داشته باشد)م—

(۶) سطح منتهی بخط میشود که آنرا (طرف سطح) گویند

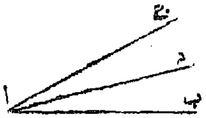
(۷) سطح مستوی آنست که هرگاه در آن دو نقطه بهر موقعی تعیین شود وآن دو نقطه را بخط مستقیم وصل دهند خط مذکور بالتمام در آن سطح واقع شود)م—

(مثلاً سطح دائره وسطح مربع وامثال آن سطوح مستویند)م—

(۸) زاویه عبارت از تمایل دو خط است که بیک نقطه متمایل شوند و در یک جهت نباشند)م—

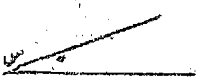
(۹) زاویهٔ مسطحهٔ مستقیمة الخطین عبارت از تمایل دو خط مستقیم است که دریک نقطه متمایل شوند ودر یک جهت نباشند

در دو فقرهٔ مذکوره یعنی هشتم ونهم تعریف زاویه شده فرق فیما بین هردو اینست که در فقرهٔ هشتم مطلق زاویه را تعریف نموده قید خطوط مستقیمه ندارد چه ممکن است از متمایل شدن دو خط منحنی یا یکی منحنی و دیگری مستقیم زاویه تشکیل یابد)م—
اما در زاویهٔ فقرهٔ نهم قید استقامت خطین است ودر اقلیدس بحث همین زاویه میباشد لهذا جهت اختصار بجای زاویهٔ مسطحهٔ مستقیمة الخطین تنها لفظ زاویه کافی خواهد بود)م—
واما اینکه در یک جهت نباشند مراد اینست که تمایل خطین این قسم (— —) نباشد چه در این صورت پس از اتصال خطین زاویه متشکل نگردد بلکه خطی نامیده خواهد شد)—
زاویه را بسه حرف موسوم سازند یعنی یک حرف را بر راس زاویه ودو حرف دیگر را بر دو ساق آن نویسند وچون خواهند تعریف آن زاویه نمایند حرف راس زاویه را میانه دو حرف دیگر نویسند




مثلاً زاویه (ج ا د) یعنی زاویه که از تمایل خط (ج ا) و (د ا) تشکیل یافته
ایضاً زاویه (د ا ب) یعنی زاویه که از تمایل خط (د ا) و (ب ا) متشکل شده است
ایضاً زاویه (ج ا ب) یعنی زاویه که از اتصال خط (ج ا) و (ب ا) متشکل شده است

هرگاه هر زاویه به سه حرف موسوم نمی‌شد در تفهیم مطالب دقّت بهم می‌رسید و زاویهٔ معلوم
در میان زوایا غیر معلوم می‌ماند)
گاه باشد که قرائن شاهد حال است اکتفا به یک حرف نمایند)
مثلاً زاویهٔ س)

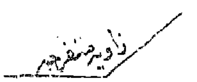



(١٠) زاویهٔ قائمه — چون بر خطّ مستقیم خطّ مستقیم دیگر قائم شود چنانچه
کرده و جانب خود دو زاویهٔ متساویه تشکیل دهد هر یکی از این دو
زاویه را زاویهٔ قائمه نامند و آن خطّ مستقیم را که بر مستقیم دیگر
قائم شده است عمود گویند)

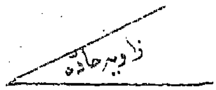



گاهی جهت اختصار لفظ زاویه را ساقط و اکتفا به لفظ قائمه کنند)

(١١) زاویه که نسبت به قائمه فرجهٔ او بیشتر باشد یعنی اوسع
باشد او را زاویهٔ منفرجه گویند)




(١٢) زاویه که نسبت به قائمه فرجه‌اش کمتر باشد
او را زاویهٔ حادّه گویند)

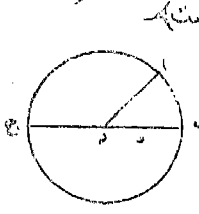



(١٣) حدّ = یعنی طرف که انتهای هر چیز باشد)

(١٤) شکل = آنست که به یک خط یا خطوط متعدّده محصور باشد)

هرگاه از اتصال دو خط در یک نقطه زاویهٔ متشکّل گردد و در دو طرف دیگر موصول نباشد او را شکل نتوان گفت زیرا که سطحی را احاطه نکرده است)

(١٥) دائره = آن شکل مسطّح را گویند که به یک خط
که او را محیط نامند محدود باشد
در میان آن نقطه باشد که از آن نقطه هر قدر خطوط
به محیط ممتد شود بالتّمام متساوی المقدار باشند)

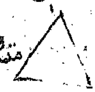


و آن

(٢٣) کثیر الاضلاع = آن شکل را گویند که زیاده از چهار خط آن را احاطه نموده باشند

(اقسام مثلث باعتبار اضلاع سه قسم است)

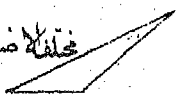
(٢٤) مثلث متساوی الاضلاع آنست که سه ضلع آن باهم متساوی باشند)




(٢٥) مثلث متساوی الساقین آنست که دو ضلع آن باهم متساوی باشند)

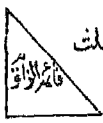



(٢٦) مثلث مختلف الاضلاع آنست که هر سه ضلع آن باهم متساوی نباشند)

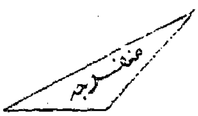



(باعتبار زوایا نیز مثلث بر سه قسم است)

(٢٧) مثلث قائم الزاویه آنست که یك زاویهٔ آن قائمه باشد)




(٢٨) مثلث منفرج الزاویه آنست که یك زاویهٔ آن منفرجه باشد)

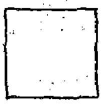



(٢٩) مثلث حاد الزوایا آنست که زوایهای آن حاده باشند)




مثلثی که یك زاویهٔ آن قائمه باشد و نیز مثلثی که یك زاویهٔ آن منفرجه باشد باقی دو زاویه از هر مثلث حادّه خواهند بود)
بنابراین باید هر مثلثی لابد دو زاویهٔ حادّه داشته باشد)
هر ضلع مثلث را قاعده توان گفت در اینصورت زاویهٔ که مقابل قاعده باشد رأس مثلث است

ضلع اقصر مثلث متساوی الساقین را غالباً قاعده گویند)
در مثلث قائم الزاویه دو خط مستقیمی که تشکیل زاویهٔ قائمه نموده اند هر یکی را از خطین



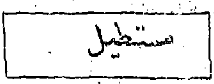
قاعده و ثانی را عمود گویند)

و خط مستقیمیکه مقابل قائمه میباشد وتر خوانند)

(باعتبار اضلاع و زوایا اشکال چهار گوشه پنج قسم است)

(۳۰) مربع = آن شکل چهار گوشه را گویند که اضلاع آن باهم متساوی باشد و زاویه‌ای آن قائمه باشد

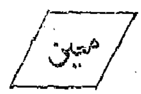
(۳۱) مستطیل یا قائم الزاویه = آن شکل چهار گوشه را گویند که زاویه‌ای آن قائمه باشد ولکن اضلاع آن باهم متساوی نباشند)



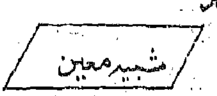

(اکثر مستطیل را قائم الزاویه گویند)

(ذوات الاضلاع یکه اضلاع متقابله آن متساوی و از زوایا یکی قائمه باشد قطعاً باقی زوایای آن قائمه خواهند بود)

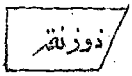
(۳۲) معین = آن شکل چهار گوشه را گویند که چهار ضلع آن متساوی باشند لکن زاویه‌ای آن قائمه نباشد




(۳۳) متوازی الاضلاع (شبه معین) آن شکل چهار گوشه را گویند که دو ضلع متقابل آن باهم متساوی باشند اما زاویه‌ای آن قائمه نباشد)




(۳۴) ذوزنقه = آن شکل چهار گوشه را گویند که دو ضلع آن متوازی باشد و دو ضلع دیگر متوازی نباشند)




(اشکال چهار گوشه که در آن اضلاع متقابله آن متوازی و غیر متساوی باشند آن اشکال را منحرف نامند)

(۳۵) خطوط مستقیم متوازی = آن دو خط را گویند که اگر دو طرف آنها به استقامت تا غیر نهایت ممتد شوند باهم اتصال و تقاطع ننمایند



قید استقامت خطوط از اینجاست که جادهٔ کالسکه دخانیه (ریلوی) کرد و خط آهن میباشند با هم متوازیند امّا نه مستقیم یعنی در جمیع نقاط ممتدّه خود در تباعد از همدیگر متساوی و متوازیند چه هرگاه چنین نباشد عبور کالسکه از روی آن متعذّر و نا ممکن است ولکن در همهٔ نقاط ممتدّه خود مستقیم نباشند)

هرگاه دو دایره یا بیشتر باین صفت باشند یعنی متحد المرکز و سطوح آنها غیر متساوی باشند پس خطوط محیط آنها متوازی غیر مستقیم میباشند)

# اصول موضوعه

(یعنی مطالبیکه فرض نموده بآن عمل نمائیم)

فرض کن که ما اختیار داریم =

(۱) از هر نقطه که بخواهیم تا نقطه دیگر خط مستقیم خارج نمائیم).

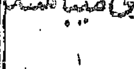
(۲) خط مستقیم محدود را باستقامت تا هر جا که خواهیم ممتد سازیم)

(۳) از مرکز تا هر فاصله که خواهیم دائره رسم نمائیم)...

# علوم متعارفه

یعنی مطالبیکه بدیهیه باشد - در تصدیق آن تأمّل نباشد و لزوم استنباط از خارج نباشد)

(۱) چیزهائیکه بیک چیز مساویند آن چیزها با هم متساوی میباشند




(مثلاً فرض کن خط (ا) مساوی خط (ب) و خط (ب) مساوی خط (ج) پس خط (ا) مساوی خط (ج) خواهد بود)

(۲) هرگاه بر چیزهای متساوی افزوده شود چیزهای متساوی حاصل آنها نیز متساوی خواهد بود)

مثلاً فرض کن (ا) و (ب) با هم متساوی و بینه افزودیم بر (ا) مقدار (ج) را پس (اج) مساوی (بج) خواهد بود

(۳) هرگاه از چیزهای متساوی کشیده شود چیزهای متساوی آنچه باقی

مانند نیز متساوی خواهند بود)

(۴) هرگاه بچیزهای غیرمتساوی افزوده شود چیزهای متساوی بعد از افزایش هم غیرمتساوی خواهند بود)

(۵) هرگاه از چیزهای غیرمتساوی کشیده شود چیزهای متساوی پس از انتزاع حاصل آن غیرمتساوی خواهد بود)

(۶) چیزهائیکه نسبت بچیزی دو چند باشند آن چیزها باهم متساوی میباشند

(۷) چیزهائیکه نسبت بچیزی نصف باشند آن چیزها باهم متساویند)

(مثلاً پانصد دینار نصف هزار دینار است لهذا پانصد دینار باهم متساویند)

(۸) مقادیریکه بریکدیگر منطبق شوند یعنی یک سطح را احاطه نمایند باهم متساویند

مراد اینست هرگاه شکلی مثلاً مثلثی را بدون اینکه خللی در آن در هیئت [?] اندازیم و بر مثلث دیگر قائم کنیم پس هرگاه اضلاع و زوایای هر دو مثلث یک سطح را احاطه نمایند متساوی خواهند بود این عمل را انطباق نامند)

(گاه باشد که باعتبار مقادیر هر دو شکل باهم متساوی باشند اما منطبق نشوند مثلاً مربعی که ضلع آن یک ذرع باشد مساوی است با مستطیلیکه طول آن دو ذرع و عرض آن نیم ذرع باشد ولکن عمل انطباق واقع نشود)

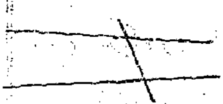
(۹) کل از جزو خود زیاد است)

(۱۰) دو خط مستقیم سطحی را احاطه نکنند)

(۱۱) تمام زوایای قائمه باهم متساویند)

هر زاویهٔ قائمه نود ۹۰ درجه میباشد اما در زوایای دیگر یعنی منفرجه و حاده چنین نیست که متساوی باشند مگر اینکه بگوئیم در مثلث متساوی الاضلاع هر یکی از زوایای ثلاثه آن شصت درجه میباشد و مجموعه هر سه زاویه یکصد و هشتاد درجه است)
و کذلک در مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه هر یکی از دو زاویه آن چهل و پنج درجه میباشد که مجموعه هر سه زاویه صد و هشتاد درجه بوده باشد)

(۱۲) هرگاه بر دو خط مستقیم خط مستقیمی واقع شود و دو زاویه داخله

یک جانب خود را کمتر از دو قائمه تشکیل نماید

پس هرگاه آن دو خط بی هم امتداد پیدا کنند
در آخر از آن سمتی که تشکیل دو زاویه کمتر از
دو قائمه نموده اند در یک جا باهم وصل و متقاطع خواهند شد)۔
(مراد اینست خطوط مستقیمه که بصفتِ مذکوره اند متوازی نباشند)

این مقاله در سه فصل منقسم است
در فصلِ اول از شکلِ اول تا شکلِ (۲۶) خواصِ مثلثات را بلحاظ اضلاع و مساوات (از حیث انطباق) و غیر مساوات زوایا بیان شده است)۔
در فصلِ دوم از شکلِ (۲۷) تا شکلِ (۳۴) از خواصِ خطوطِ متوازیه و متوازی الاضلاع بحث شده است)
در فصلِ سوم از شکلِ (۳۵) تا شکلِ (۴۸) مساوات متوازی الاضلاع مع مثلثات بلحاظ سطوح (یعنی نه از حیثِ انطباق)۔ و ثبوتِ مساواتِ مربع محوری و قاعدۂ مثلثِ قائم الزاویہ مع مربع وتر ذکر شده است)۔
در این مقاله جهت توضیح علائم اشکال این حروف استعمال شود)۔
ا ب ج د س ص ط ع ق ل م ی (یعنی ابجد سعفص قلمی)۔
و هنگام لزوم نیز صفر (٥) یعنی حلقه میان خالی بکار برده آید)۔

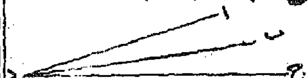
## سؤالات متعلق با صول علم هندسه

(۱) نقطه را چه قسم تعریف کنند ـ چه چیز است در آن و چه چیز در آن نیست
(۲) هرگاه نقاطِ هندسیه را علی الاتصال در یک قطار جا دهند آیا از آنها خطِ مستقیم پیدا خواهد شد ـ و هرگاه میشود چه قسم خواهد بود
(۳) خارج کن دو خط را قسمیکه برد و نقطه تقاطع نمایند ـ و آیا ممکن است اخراج دو خطِ مستقیم که بر دو نقطه متقاطع باشند
(۴) خطِ مستقیم را (اقلیدس) چه قسم تعریف نموده است)۔
(۵) هرگاه خطوطِ مستقیمۂ هندسیه را علی الاتصال در قرب همدیگر گذاریم

آیا از آنها سطح متشکل خواهد شد یا نه — هرگاه میشود وجه آن چیست

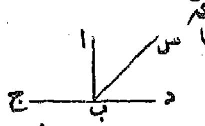
(۶) هرگاه در سطح مستوی دو نقطه را معین نموده بخط مستقیمی وصل نمائیم آن خط مستقیم در کجا واقع شود
هرگاه خط مستقیم مذکور امتداد پیدا کند مقدار ممتد آن کجا واقع خواهد شد؟

(۷) بر نقطهٔ (د) سه خط مستقیم یعنی (دا) و (دب) و (دج) موصول میشوند =




بیان کن زوایای ثلاثه را که از آنها متشکل شده اند یعنی درمیان (دا) و (دب) و درمیان (دب) و (دج) و درمیان (دج) و (دا) و آن قسمیکه زاویهٔ (ا) را توان تعریف نمود بیان کن و نیز در صورتیکه زاویهٔ (ادب) و (بدج) را جمع کنیم از آنها کدام زاویه متشکل خواهد شد؟

(۸) درین شکل اسم دو زاویهٔ قائمه و دو زاویهٔ منفرجه را بیان کن؟




(۹) آیا کافی خواهد بود یا در تعریف خطوط متوازیه صرف همین فقره که بگوئیم آنها از دو طرف هر قدر امتداد پیدا کنند باهم وصل نشوند

(۱۰) برای احاطه نمودن سطح چند خط اقلاً لازم باشد — (درمثلث جواب بگو)

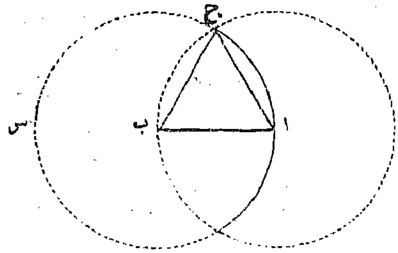
(۱۱) چه امتیاز است میان لفظ محیط و دائره؟

(۱۲) هرگاه نقطه در دائره واقع شود ثابت کن که فاصلهٔ آن از مرکز کمتر از نیم قطر خواهد بود

از آلات هندسه استعمال مسطر (خط کش) و پرکار را اقلیدس جائز داده
ولکن بمحل لزوم و الا هرگز بر ضرورت استعمال آن روا باشد
پس از جهت بجا آثبات پاره از اشکال فضول بوده تنها بر محل خود معلوم کرده

## شکل اول عملی

برخط مستقیم مفروض بنا مثلث متساوی الاضلاع




فرض کن (اب) خط مستقیم مفروض

ومقصود اینست که برخط (اب) مثلث متساوی الاضلاع مرتسم کردد)

وضع شکل = بحکم اصول ۳) از مرکز (ا) بفاصلهٔ (اب)

بنا دائرهٔ (بج د) را و از مرکز (ب) بفاصلهٔ (ب ا) بنا دائره

(اج س) را (بحکم اصول ۱) از نقطهٔ (ج) که محل تقاطع دائرتین است

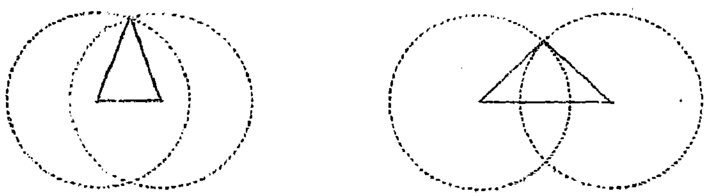
خارج کن خط مستقیم (ج ا) و (ج ب) را

پس (ا ب ج) مثلث متساوی الاضلاع خواهد بود)۔

ثبوت = چونکه (ا) مرکز دائرهٔ (ب ج د) است

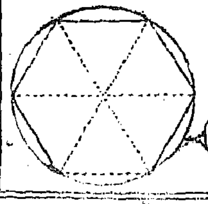
لهذا (بحکم حد ۱۵) (اب) و (اج) باهم متساویند)۔

ایضاً چونکه ب مرکز دائرهٔ (اج س) است
لهذا (ب ج) و (ب ا) باهم مُتساوی میباشند۔
وامّا در فوق ثابت شد که (اج) و (اب) باهم مُتساویند
وچونکه (بحکم علوم ۱) چیزهائیکه بیك چیز مُساویند آن چیزها باهم متساویند
بنابراین (اج) و (ج ب) و (ب ا) باهم مُتساوی میباشند۔
لهذا مُثلّث متساوی الاضلاع مرتسم گردید و مراد همین بوده۔



## تفهیم

(۱) هر مُثلّث متساوی الاضلاع متساوی الزّوایا میباشد۔
(۲) محیط دو دائره متساویه =
(اوّل) هرگاه بر مرکز همدیگر بگذرند پس مثلّث مرتسم بر مرکزین و ماس بنقطهٔ تقاطع دائرتین متساوی الاضلاع خواهد بود چنانکه در شکل ثابت شد۔
(دوّم) هرگاه بر مرکز همدیگر عبور نکنند یعنی در صورتیکه مرکز هر یکی خارج از سطح دیگری باشد پس مثلّث مرتسم بر مرکزین و ماس بنقطهٔ تقاطع دائرتین متساوی السّاقین منفرجه خواهد بود یعنی انفراج زاویهٔ راس آن زیاده خواهد بود نسبت هر یکی از باقی زاویتین۔
(سوّم) هرگاه مرکز هر دو دائره در سطح همدیگر باشد پس مثلّث مرتسم بر مرکزین و ماس بنقطهٔ تقاطع دائرتین حادة الزوایا خواهد بود یعنی انفراج زاویهٔ راس آن کمتر خواهد بود نسبت هر یکی از باقی زاویتین۔
(۳) محیط هر دائره از سمت محاط یا مقعّر =
(اوّل) گنجائش رَسا شش مثلّث متساوی الاضلاع را دارد که هر ضلع آن مساوی نیم قطر باشد۔
(دوّم) گنجائش شش قوس را دارد که وتر هر قوسی مساوی نیم قطر باشد۔

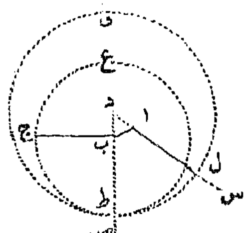


(۴) (سوّم) کنجایش رسم مسدّس را دارد که هر ضلع آن بمساوی نیم قطر باشد (۵) اسا ... این شکل یعنی دائره که مادر اشکال هندسیّه میباشد دارای خواص بسیار است که در کل مقالات آتیه بر محل خود مذکور و مبیّن خواهد شد در اینجا محض تشویق مبتدیان اشارت رفت

## شکل (۲) عملی

از نقطهٔ معلوم خارج کن خط مستقیمی را که مساوی باشد

با خط مستقیم مفروض




فرض کن (ا) نقطهٔ معلوم و (ب ج) خط مستقیم مفروض مطلوب اینست که

از نقطهٔ (ا) خط مستقیمی بمساوی خط مستقیم مفروض خارج شود

وضع شکل = (بحکم اصول ۱) (ا) و (ب) را بخط مستقیم وصل کن و (بحکم

ش ۱) بنا بر (ا ب) مثلّث متساوی الاضلاع (د ا ب) را

و (بحکم اصول ۲) خارج کن (د ا) و (د ب) را تا نقطه (س) و (ص)

و (بحکم اصول ۳) از مرکز (ب) بفاصلهٔ (ب ج) بنا دائرهٔ (ج ط ع) را که

(د ص) را بر نقطهٔ (ط) قطع نماید

ایضاً از مرکز (د) بفاصلهٔ (د ط) بنا دائرهٔ (ط ق ل) را که (د س) را بر نقطهٔ (ل) قطع نماید

ثبوت = چونکه (ب) مرکز دائرهٔ (ج ط ع) است پس (ب ج) بمساوی (ب ط) خواهد بود

ایضاً (بحکم حد ۱۵) چونکه (د) مرکز دائرهٔ (ط ق ل) است پس (د ل) بمساوی

د ط

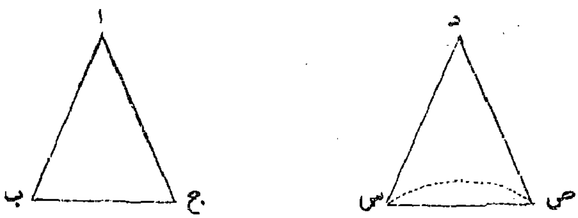
مُتساوی‌یان دوچند باشد نسبت بقاعده)۔

(۳) پیدا کن خط مستقیمی را که مساوی باشد با مجموع خطین و فرق آن)۔
(۴) چون مجموعهٔ خطین را بر فرق آن بیفزایند خطی که حاصل شود دوچندِ خطِ اطول خواهد بود
و هرگاه از مجموعهٔ خطین فرق آنها را تفریق نمایند خطی که حاصل شود دوچندِ خطِ اقصر خواهد بود)۔

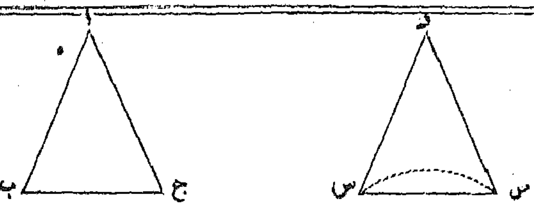
توضیح = چون مقدار اقل را از اکثر تفریق نمایند آنچه فاضل آید فرق مقدارین نامند)۔ مثلاً هرگاه خطی را که طولاً یک ذرع است از خط دیگر که طول آن یک ذرع و نیم است تفریق نمایند پس نیم ذرعی که فاضل مانده است فرق خطین میباشد)۔

## شکل (۴) اثباتی

هرگاه دو ضلع مُثلّثی با دو ضلع مُثلّثِ دیگر بانظائر خود مُتساوی باشند و زوایای این اضلاع هم متساوی باشند پس هر دو قاعدهٔ آن یعنی ضلع سوّم از هر مُثلّث باهم متساوی خواهد بود و نیز زوایای مُتشکّلهٔ این اضلاع بانظائر خود مُتساوی خواهند بود)۔




فرض کن در دو مُثلّث (ا ب ج) و (د س ص)
دو ضلع (ا ب) و (ا ج) با دو ضلع (د س) و (د ص) هر یکی بانظیر خود مساوی است
یعنی (ا ب) بمساوی (د س) و (ا ج) بمساوی (د ص))۔
و زاویهٔ (ب ا ج) بمساوی زاویهٔ (س د ص است)
بنابراین قاعدهٔ (ب ج) بمساوی قاعدهٔ (س ص) خواهد بود)۔




ومثلث (ابج) مساوی مثلث (د س ص)

وزوایای متقابلهٔ اضلاع از هردو مثلث بانظائر خود نیز متساوی خواهند بود

یعنی زاویهٔ (ابج) مساوی (دسص) وزاویهٔ (اجب) مساوی (دصس) خواهد بود

ثبوت = بدلیل اینکه هرگاه مثلث (ابج) برمثلث (دسص) نهاده شود

قسمیکه نقطهٔ (ا) بر نقطهٔ (د) وخط مستقیم (اب) برخط مستقیم (دس) منطبق کرده شود

چونکه (بموجب مفروض) (اب) مساوی است با (دس)

لهذا نقطهٔ (ب) بر نقطهٔ (س) منطبق خواهد شد

وچون (اب) بر (دس) منطبق باشد قطعاً خط (اج) بر (دص) منطبق خواهد شد

زیراکه (بموجب مفروض) زاویهٔ (باج) مساوی است با زاویهٔ (سدص)

ایضاً چونکه (بموجب مفروض) (اج) مساوی (دص) است

لهذا نقطهٔ (ج) بر نقطهٔ (ص) منطبق خواهد شد

واما انطباق نقطهٔ (ب) بر نقطهٔ (س) ثابت ومذکور شد

وچون نقطهٔ (ب) بر نقطهٔ (س) ونقطهٔ (ج) بر نقطهٔ (ص) منطبق باشد

قطعاً قاعدهٔ (بج) برقاعدهٔ (سص) منطبق خواهد شد

وهرگاه چنین نباشد یعنی قاعدهٔ (بج) بر قاعدهٔ (سص) منطبق نباشد

ومع ذلک دو خط مستقیم (بج) و (سص) یک سطحی را احاطه نمایند

این اثبات (بحکم علم ۱۰) ناممکن است )۔

لهٰذا (بحکم علم ۸) قاعدهٔ (ب ج) بر قاعدهٔ (س ص) منطبق و مثلثِ (ا ب ج) با مثلثِ (د س ص) از هر حیثیت مساوی ثابت شد و منظور همین بوده است )۔

## تفهیم

(۱) هر مثلثی شش جزو دارد یعنی سه ضلع و سه زاویه )۔

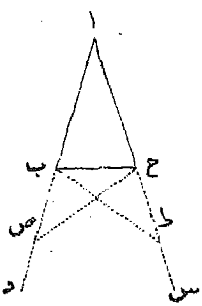
(۲) دو مثلث را انگاه متطابق گویند که بر یکدیگر منطبق شوند — زیرا که در اینصورت هر جزوی از یک مثلث مساوی خواهد بود با جزو مثلث دیگر موافق نظیر خود )۔ گاه باشد که دو شکل باهم متحد المساوات باشند اما منطبق نشوند (ببین تفهیم علم ۸ )۔

## شکل (۵) اثباتی

زوایای فوق قاعدهٔ مثلثِ متساوی الساقین باهم متساوی میباشند و هرگاه ساقین مثلث بقدر همدیگر ممتد شوند نیز زوایای طرفین تحت قاعده هم متساوی خواهند بود

فرض کن (ا ب ج) مثلث متساوی الساقین و دو ضلع آن اب و اج باهم متساوی میباشند )۔

و نیز فرض کن ساقین آن (اب) و (اج) تا نقطهٔ (د) و (س) خارج شده اند




بنابرین زاویهٔ (ا ب ج) مساوی زاویهٔ (ا ج ب) خواهد بود )۔

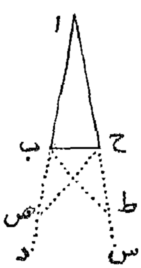
و نیز زاویهٔ (د ب ج) مساوی زاویهٔ (س ج ب) خواهد بود )۔

وضع شکل: در خط (ب د) معیّن کن نقطهٔ را مثلاً (ص) )۔

و (بحکم ش ۳) از خط اطول (ا س) قطع کن (ا ط) را که مساوی باشد با خطِ کوچک (ا ص)

وصل کن (ص ج) و (ط ب) را اختصار این کلمه است که از نقطهٔ (ص) الی نقطهٔ (ج)
واز نقطهٔ (ط) الی (ب) خطی خارج کن)۔

ثبوت = چون (اط) بمساوی اص معیّن شده است)۔
و (بموجب مفروض) (اب) بمساوی (اج) مرتسم
لهذا دو ضلع (ص ا) و (اج) با ضلعین (ط ا) و (اب) متساوی میباشند هر
یکی با نظیر خود موافق
وزاویهٔ (ص اج) که درمیان اضلاع مذکوره است
نسبت بهردو یعنی (اصج) و (اطب) مشترك میباشند
ازاینجهت (بحکم ش ۴) قاعدهٔ (صج) مساوی است باقاعدهٔ طب؛
ومثلّث (اصج) مساوی است بامثلّث (اطب)۔
وباقی زوایای یك مثلّث متساویند یاباقی زوایای مثلّث دیگر هریکی بانظیر
خود که درمقابل اضلاع متساویه واقع شده
یعنی زاویهٔ (اجص) مساویست بازاویهٔ ابط)۔




وزاویهٔ (اصج) مساوی است بازاویهٔ (اطب)۔
زیراکه تمام خط (اص) مساویست باتمام خط (اط)۔
و (بموجب مفروض) (اب) و (اج) باهم متساویند
لهذا (بحکم علم ۳) بقیّهٔ حصص یعنی (ب ص) و (ج ط) باهم متساوی میباشند
واما متساوی بودن (صج) و (طب) ثابت ومذکور شد
بنابراین ضلعین (ب ص) و (صج) مساویند با ضلعین (ج ط) و (طب) متوافق

بانظائر خود)ـ .

و در فوق ثابت و مذکور شد که زاویهٔ (ب ص ج) مساویست بازاویهٔ (ج ط ب)

لهذا (بعکس ش ۴)ـ مثلثِ ب ص ج مساویست با مثلثِ (ج ط ب)ـ

و زوایای آنها که در مقابل اضلاعِ متساویه واقعند بانظائر خود متساوی میباشند

یعنی زاویهٔ (ص ج ب) مساویست بازاویهٔ (ط ج ب)

و زاویهٔ (ب ج ص) مساویست بازاویهٔ (ج ب ط)

و چون پیش از این ثابت شد که تمام زاویهٔ (ا ب ط) مساویست با تمام زاویهٔ (ا ج ص)

و حصص آنها یعنی زاویهٔ (ج ب ط) و (ب ج ص) باهم متساویند)

لهذا بقیهٔ زاویه یعنی (ا ب ج) مساویست با بقیهٔ زاویهٔ (ا ج ب)

و این زوایا بر (ب ج) که قاعدهٔ مثلثِ (ا ب ج) است واقعند)ـ

و نیز در مبحث ثابت شد که زاویهٔ (ص ب ج) مساویست با زاویهٔ (ط ج ب)

و این زوایا تحتِ قاعدهٔ (ب ج) میباشند)ـ

لهذا زوایای فوق قاعده الخ

تفهیم = هرگاه در مثلثی دو زاویهٔ آن غیر متساوی باشند پس اضلاع متقابلهٔ آنها نیز غیر متساوی خواهند بود

مشق

(۱) هرگاه بر قاعدهٔ (ب ج) در یک جانب یا در جوانب متقابلهٔ آن دو مثلثِ متساوی الساقین ا ب ج و (د ب ج) مرتسم شوند ثابت کن که زاویهٔ (ا ب د) بمساوی زاویهٔ (ا ج د) میباشد)ـ

(۲) متساوی بودن زوایای متقابلهٔ شکل معین را ثابت کن)ـ

(۳) (ا ب) خط مستقیمی است مفروض و (ج) نقطهٔ مفروضه که خارج از آن است پیدا کن در (ا ب) نقاطی را که فاصلهٔ آنها از ج متساوی باشد با خط مستقیم (ج ۸)ـ
و آیا در هر حالت توان چنین نقاطی را پیدا نمود)ـ

(۴) هرگاه (ج) راس مثلث متساوی الساقین و (ا) انتهای یک طرف قاعدهٔ آن معلوم باشد پیدا کن (ب) انتهای طرف دیگر را در صورتیکه ارتسام آن مثلث بر خطِ مستقیم (ع ق) منظور باشد

(۵) (اع ق ب) خطی است مستقیم بساز برابر (اب) مثلث (ا ب ج) را قسمی که ساق (اج) مساوی باشد با (اق) و ساق (ب ج) با (ع ب)

(۶) در مبحث شکل دوم ممکن است نقطهٔ (ا) را بیک طرفی از طرفین (ب ج) وصل نمائیم پس بساز شکل و ثابت کن دعوی را در صورتیکه (ا) موصول شود با (ج)

(۷) (ا ب ج د) مربعی است و (س) و (ص) و (ط) نقاط وسط در اضلاع (اب) - (ب ج) و (ج د) ثابت کن =

(اوّل) (س ص) برابر (ص ط)

(دوم) (اص) مساوی (د ص)

(سوم) (اط) مساوی (اص)

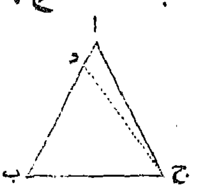
(چهارم) (ب ط) مساوی (د ص) - (برای هر ثبوتی شکلی بساز)

(۸) (اب) و (اج) اضلاع مثلث متساوی الساقین و س - ص - ط نقاط اوسط اضلاع (اب) و (ب ج) و (اج) میباشند ثابت کن (س ص) مساوی (ص ط) میباشد و نیز ثابت کن که زاویهٔ (ا س ص) برابر است با زاویهٔ (اطص)

(شکل پنجم را ماموئی گویند زیرا که خلیفهٔ بغداد این شکل را بسیار دوست میداشت بحدّیکه بر ملبوسات خود نقش مینمود - مؤلف گوید این هم گویا از این قبیل باشد که هر یکی از سلاطین حالیه نشانی و علامتی از علائم مختص خود و امنای دولت قرار داده اند چنانچه فی زماننا هذا نقش هلالی نشان سلاطین عثمانیّه و شیر و خورشید مختص دودمان دولت قاجاریه میباشد دام دولتهم ۱۲ منه)

## شکل (۶) اثباتی

هرگاه در مثلثی دو زاویه باهم متساوی باشند اضلاع آنها نیز باهم متساوی خواهند بود




فرض کن (ا ب ج) مثلث و زوایای آن (ا ب ج) و (ا ج ب) باهم متساوی باشند

لهذا ضلع (اب) برابر ضلع (اج) خواهد بود

وضع شکل = زیرا که هرگاه (اب) مساوی (اج) نباشد

پس باید یکی بزرگ و دیگری کوچک باشد

فرض کن (اب) اطول است از (اج)۔

پس (بحکم ش ۳) از خط (ب ا) قطع کن (ب د) را که مساوی خطِ اقصر (اج) باشد وصل کن (دج) را

ثبوت = چون در دو مثلثِ (دبج) و (اج ب) ضلع (دب) برابرِ (اج) مرتسم شده است

و (ب ج) در هر دو مثلث مشترک است

بنابراین ضلعین (دب) و (ب ج) مساویند با ضلعینِ (اج) و (ج ب) هر یکی با نظیر خود)۔

و زاویهٔ (دبج) مساوی است با زاویهٔ (اج ب)

لهذا (بحکم ش ۴) ضلعِ دج مساوی است با ضلعِ (اب)

و مثلثِ (دبج) برابر است با مثلثِ (اج ب)

یعنی جزو مساوی کل است و این (بحکمِ علم ۹) باطل)۔

بنابراین (بموجب فرض اوّل) (اب) و (اج) غیر متساوی نباشند

یعنی (اب) و (اج) باهم متساویند)۔

لهذا هرگاه در مثلثی دو زاویه الخ

تفهیم = این شکل یعنی ششم عکس شکل پنجم است)۔
شکلی را عکس شکل دیگر آنگاه گویند که نتیجهٔ یک شکل در شکل دیگر فرض نموده شود مثلاً در شکل پنجم فرض شده است که ضلعین مثلث معلومه متساویند و نتیجهٔ آن حاصل شد که زاویتین نیز متساوی میباشند)۔
و در شکل ششم فرض شده است که دو زاویه مثلثِ معلومه متساویند و منتج شده است که ضلعین آن هم متساوی میباشند)۔
کذلک هرگاه در دعوی شکلی مفروضا متعدد باشد عکس آن نیز متعدد خواهد بود)۔

اقلیدس غالباً دعوی اشکال را معکوس نموده ثابت میکند ولیکن قاعدهٔ کلیه برای آن قرار نداده است که دعوی هر شکلی بطور معکوس صحیح باشد)ـ

مثلاً عکس دعوی شکل هشتم درست نباشد یعنی هرگاه سه زاویهٔ مثلثی مساوی باشند با سه زاویهٔ مثلث دیگر لازم نیست که سه ضلع این یکی هم مساوی باشد با سه ضلع آن دیگر)ـ

هرگاه در مثلثی دو ضلع آن غیر متساوی باشد پس زوایای مقابلهٔ آن هم غیر متساوی خواهند بود)ـ

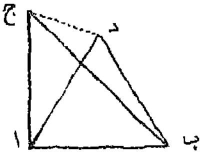
## مشق

(۱) هرگاه در مثلث متساوی الساقین (ا ب ج) زاویتین (ا ب ج) و (ا ج ب) تنصیف شوند از خط (ب د) و (ج د) که بر نقطهٔ (د) موصول باشند ثابت کن مثلث (ب د ج) متساوی الساقین است

(۲) در شکل پنجم هرگاه (ب ط) و (ج ص) بر نقطهٔ (ع) تقاطع نمایند ثابت کن مثلث (ع ب ج) متساوی الساقین میباشند)ـ

## شکل (۷) اثباتی

هرگاه دو ضلع متساوی از دو مثلث بر یک قاعده و بر یک طرف آن منتهی شده باشند و دو ضلع دیگر بر طرف دیگر آن قاعده منتهی شوند ممکن نیست که این دو ضلع باهم متساوی باشند




فرض کن (ا ب ج) و (ا د ب) دو مثلث معلوم و دو ضلع آن (ا ج) و (د ا) که بر قاعدهٔ (ا ب) در نقطهٔ (ا) منتهی شده اند باهم متساوی میباشند در اینصورت ممکن نیست که دو ضلع دیگر یعنی (ج ب) و (د ب) که بر نقطهٔ (ب) منتهی شده اند باهم متساوی باشند)ـ

وضع شکل = وصل کن (ج د) را

(اوّل) درصورتیکه رأس یك مثلّث خارج از مثلّث دیگر باشد

ثبوت:- چون (اج) بمساوی (اد) فرض شده است

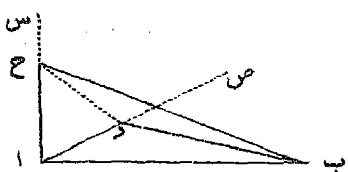
لهذا (بحکم ش ۵) زاویهٔ (اج د) برابر زاویهٔ (ادج) خواهد بود

لیکن (بحکم علم ۹) زاویهٔ (اج د) اوسع است نسبت بزاویهٔ (ب ج د)

وکذلك فرجهٔ (ادج) بیشتر است نسبت بزاویهٔ (ب ج د)

بنابراین (بحکم ش ۵) (ب ج) و(ب د) باهم متساوی نباشند)ه

(دوّم) درصورتیکه راس یك مثلّث داخل مثلّث دیگر واقع باشد




ممتد ساز (اج) و(اد) را الی (س) و(ص)

چون (بموجب مفروض) (اج) مساوی است با (اد)ه

لهذا (بحکم ش ۵) زاویهٔ (س ج د) مساوی است با زاویهٔ (ص د ج)

(زیراکه زوایای تحت قاعدهٔ (ج د) است)ه

لیکن (بحکم علم ۹) زاویهٔ (س ج د) نسبت بزاویهٔ (ب ج د) اوسع است

زیراکه این جزو آن است

لهذا (بحکم ش ۵) (ب ج) و(ب د) باهم متساوی نباشند)ه

(سوّم) درصورتیکه راس یك مثلّث برضلع مثلّث دیگر واقع شود

درباین صورت محتاج باثبات نیست)ه

لهذا هرگاه دو ضلع متساوی الخ

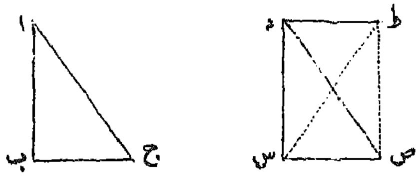
تفهیم

(۱) بر یک قاعده ودر یک جانب آن ممکن نیست ارتسام دو مثلث متساوی الاضلاع ہے

(۲) بر یک قاعده ودر یک جانب آن ممکن نیست ارتسام دو مثلث متساوی الساقین که هر ساق آن برابر باشد با خط مستقیم مفروض ہے

## شکل (۸) اثباتی

در دو مثلث هرگاه ضلعین یک مثلث متساوی باشند با ضلعین مثلث دیگر متوافق بانظائر خود ونیز قاعده هر دو مثلث باهم متساوی باشد بیرون زاویا هر دو مثلث که از اضلاع متساویه تشکیل یافته اند بانظائر خود متساوی خواهند بود




فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلث معلومه اند

ودو ضلع آن (ا ب) و (ا ج) متساویند با ضلعین (د س) و (د ص) هریکی موافق بانظیر خود

یعنی (ا ب) برابر (د س) و (ا ج) مساوی (د ص) است

ونیز قاعده (ب ج) مساوی قاعده (س ص)

بنابراین زاویه (ب ا ج) مساوی (س د ص) خواهد بود ہے

ثبوت = بدلیل اینکه هرگاه مثلث (ا ب ج) بر مثلث (د س ص) منطبق شود

قسمیکه نقطهٔ (ب) بر (س) ونیز خط مستقیم (ب ج) برخط مستقیم (س ص) منطبق شود

وچونکه (بموجب مفروض) (ب ج) مساویست با (س ص)

لهذا نقطهٔ (ج) بر نقطهٔ (ص) منطبق خواهد شد)

کذلک قاعدهٔ (ب ج) بر قاعدهٔ (س ص) منطبق خواهد شد)۔

وبهمین طریق انطباق (ب ا) و (ا ج) بر (س د) و (د ص) بعمل می آید

زیراکه هرگاه قاعدهٔ (ب ج) برقاعدهٔ (س ص) منطبق باشد

ولکن انطباق ضلعین (ب ا) و (ا ج) برضلعین (س د) و (د ص) واقع نشود

یعنی برمقام مختلف مثلاً بر (س ط) و (ص ط) واقع باشد

دراینصورت بریک قاعده وبریک سمت آن دو مثلث کرتمام اجزای

آنها از هرحیثیت بانظائر خود متساوی باشند واقع شده اند

واین (بحکم ش ۷) ناممکن است)۔

بنابراین چون قاعدهٔ (ب ج) منطبق شود برقاعدهٔ (س ص) قطعاً ضلعین

(ب ا) و (ا ج) منطبق خواهند شد برضلعین (س د) و (د ص)۔

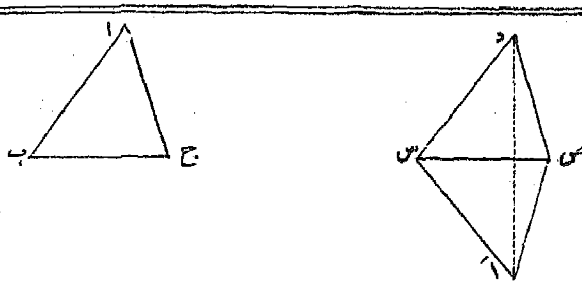
وچون زاویهٔ (ب ا ج) منطبق شود برزاویهٔ (س د ص)

لهذا (بحکم علم ۸) باهم متساوی میباشند)۔

لهذا در دو مثلث هرگاه ضلعین الخ

بعضی از مهندسین شکل هشتم را این

قسم ثابت نموده اند که لاتعلق است بشکل هفتم




فرض کن (ابج) و (دس ص) دو مثلّث‌اند و ضلعاین (ب ا) و (اج) از یك مثلّث متساوی‌اند با ضلعاین (س د) و (د ص) از مثلّثِ دیگر متوافق بانظائر خود)

وقاعدهٔ (ب ج) مساوی باقاعدهٔ (س ص)

پس زاویهٔ (ب اج) مساوی خواهد بود با زاویهٔ (س د ص)

وضع شکل = یکسان یعنی منطبق ساز مثلّثِ (ابج) را بر مثلّث (دس ص) قسمیکه (ب) بر نقطهٔ (س) و (ب ج) بر نقطهٔ (س ص) واقع شود

پس نقطهٔ (ج) بر (ص) واقع خواهد شد)

ثبوت = زیراکه (بموجب مفروض) (ب ج) مساوی (س ص) است

فرض کن برای مثلّثِ (ابج) مقامی دیگر یعنی (اَس ص) (الف مفتوحه)

پس هرگاه (د ص) و (ص اَ) و نیز (د س) و (س اَ) در یك خطِ مستقیم نباشند

وضع شکل = وصل کن (د اَ)

(اوّل) درصورتیکه (د ا) قطع کند (س ص) را

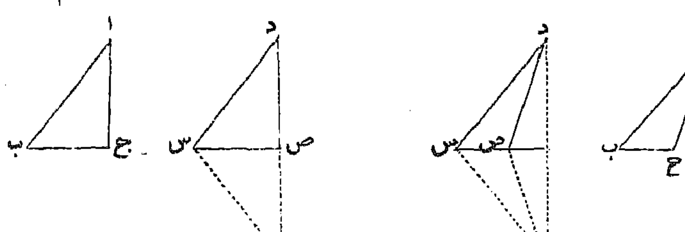
چونکه (س د) برابر است با (س اَ) لهذا (بحکم ش ۵) زاویهٔ (س د اَ) مساویست با زاویهٔ (س اَ د)

ایضاً چونکه (ص د) برابر است با (ص اَ) لهذا کلّ زاویهٔ (س د ص) مساویست با کلّ زاویهٔ (س اَ ص)

یعنی (س د ص) مساوی زاویهٔ (ب اج) میباشد)

(دوّم) درصورتیکه (د اَ) موصول شود با (س ص) مسدود ه)

(سوّم) درصورتیکه یکزوجِ اضلاع مثلاً (د ص) و (ص اَ) دریك خطِ مستقیم واقع شوند



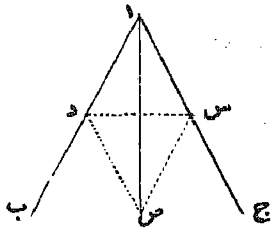

این هر دو صورتها مثل صورتِ اوّل ثابت توان نمود)

تفهیم

تفهیم
(۱) هرگاه اضلاع ثلاثۂ یک مثلث با اضلاع ثلاثۂ دیگر موافق نظیر خود متساوی باشند
آن مثلث از هر حیثیت باهم متساوی خواهند بود۔
(۲) خطی که راس متساوی الساقین و نقطه وسط قاعده را وصل دهد زاویۂ راس را
تنصیف خواهد نمود)۔
(۳) زوایای متقابلۂ شکل معین باهم متساوی میباشند و اقطار آن تنصیف زوایا نمایند)۔

# شکل (۹) عملی

تنصیف کن زاویۂ مستقیمۃ الخطین را یعنی تقسیم کن در دو
قسمت متساویه




فرض کن (ب ا ج) زاویۂ مستقیمۃ الخطین است و مقصود اینست که
زاویۂ مذکوره در دو حصّهٔ برابر منقسم شود۔
وضع شکل = در (ا ب) نقطۂ را مثلاً (د) معیّن کن
و (بحکم ش ۳) از خط (ا ج) قطع کن مقدار (ا س) را که برابر باشد با (ا د)
وصل کن (د س) را
و (بحکم ش ۱) بر ضلع (س د) بساز مثلث متساوی الاضلاع (س د ص) را
که محاذی (ا) باشد)۔
وصل کن (ا ص) را)۔

لهذا خطّ مستقیم (اص) منصّفِ زاویهٔ (ب اج) خواهد بود)۔

ثبوت = بدلیل اینکه (اد) مساوی (اس) مرتسم شده است

لهذا (اص) نسبت بهر دو مثلّث یعنی (داص) و (س اص) مشترکست

بنابراین ضلع (دا) و (اص) متساویند باضلعین (س ا) و (اص)

هر یکی موافق بانظیر خود)۔

وچون قاعدهٔ (دص) مساوی قاعدهٔ (س ص) مرتسم شده است

لهذا (بحکم ش ۸) زاویهٔ (داص) مساویست با زاویهٔ (س اص)

لهذا تنصیف زاویهٔ مستقیمة الخطّین (ب اج) بوسیلهٔ خطِ

(اص) بعمل آمد و مقصود همین بوده)۔

## تفهیما

(۱) مثلّث (د س ص) که بعید از (ا) مرتسم شده است از این جهت است که هرگاه بجانب (ا) ساخته میشد ممکن بود که نقطهٔ (ص) بر نقطهٔ (ا) منطبق شود پس در اینصورت تنصیف زاویه بطریق مذکور ناممکن بود

(۲) خطِ (اص) بر (د س) عمود میباشد)۔

(۳) در (اص) هر نقطهٔ که معین شود فاصلهٔ آن نسبت به (د) و (س) مساوی خواهد بود

(۴) زاویهٔ (د ص س) را (اص) تنصیف میکند)۔

(۵) ممکن است بجای مثلّث متساوی الاضلاع (مثلّث) متساوی السّاقین ساخته نتیجهٔ دعوی را ثابت کنیم)۔

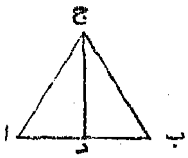
مشق تقسیم کن مثلّثِ متساوی السّاقین را در دو مثلّث متساوی الزّوایا)۔

| | | |
|---|---|---|
| | شکل (۱۰) عملی | . |

تنصیف کن خطِ مستقیم محدود را

یعنی تقسیم کن در دو قسمت متساوی






فرض کن (اب) خطِ مستقیمِ معلوم و مطلوب اینست که خط (اب) در دو حصّهٔ برابر منقسم شود۔

وضع شکل = (بحکم ش ۱) بر (اب) رسم کن مثلّثِ متساوی الاضلاع (اب ج) را

و (بحکم ش ۹) تنصیف کن زاویهٔ (اج ب) را بوسیلهٔ خطِ مستقیم (ج د) کرد (اب) و نقطهٔ (د) برسد)۔

لهٰذا (اب) در نقطهٔ (د) تنصیف خواهد شد)۔

ثبوت = بدلیل اینکه (بحکم حد ۲۴) (اج) مساوی (ج ب) مرتسم شده است

و در هر دو مثلّث (اج د) و (ب ج د) خطِ مستقیم (ج د) مشترک است

بنابراین ضلعین (اج) و (ج د) مساوی اند با ضلعین (ب ج) و (ج د) متوافق با نظائر خود)۔

و چون زاویهٔ (اج د) با زاویهٔ (ب ج د) متساوی مرتسم شده است

لهٰذا قاعدهٔ (اد) برابر است با قاعدهٔ (ب د)

لهٰذا تنصیف خطِ مستقیم (اب) در نقطهٔ (د) بعمل آمده همین بوده است

مشق

(۱) ثابت کن خطِ (ج د) که تنصیف (اب) میکند بر آن عمود است)۔

(۲) بنما خطِ مستقیم محدود را بوسیلهٔ دائرتین چه قسم توان تنصیف نمود)۔

(٣) برقاعدهٔ معلومه رسم کن متساوی الساقینی را قسمیکه مجموعهٔ دو ضلع متساویهٔ آن مساوی باشد باخطِ مستقیم مفروض )م

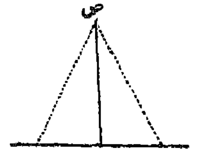
(۴) هرگاه در شکلِ هم تنصیف نمائیم زاویهٔ (ا) را بهٔ (اس) که در (ج ب) بر نقطهٔ (س) موصول شود ثابت کن که (ب س) مساوی (ب د) خواهد بود

(۵) هر نقطهٔ که از (ا) و (ب) بفاصله مساوی باشد آن نقطه در (ج د) واقع خواهد شد )م

## شکل (١١) عملی

برخطِ مُستقیم معلوم و بر نقطهٔ معلومهٔ آن خارج کن

خطِ مُستقیمیکه برخط معلومهٔ مذکوره زاویهٔ قائمه تشکیل نماید




فرض کن اب خط مستقیم معلوم و ج نقطهٔ معلومه در آن

مَطلوب اینست که بر نقطهٔ (ج) خطِ مستقیمی قائم شود

که بر (اب) زاویهٔ قائمه تشکیل نماید )م

وضع شکل = مُعیّن کن در (اج) نقطهٔ را مثلاً (د)

و (بحکم ش ٣) ج س را بمساوی ج د مُعیّن کن

و (بحکم ش ١) بساز بر د س مثلثِ متساوی الاضلاع (د ص س) را

وصل کن ج ص را

بنابر این خطِ مستقیم ج ص که بر نقطهٔ (ج) قائم شده است

بر (اب) زاویهٔ قائمه تشکیل خواهد نمود

ثبوت = زیراکه د ج برابرِ ج س مرتسم شده است )م

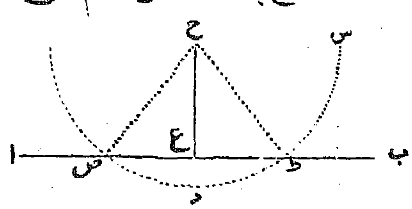
و (ج ص) نسبت بهردو مثلّث (د ج ص) و (س ج ص) مشترک میباشد
لهذا ضلعین (د ج) و (ج ص) متساویند با ضلعین (س ج) و (ج ص) متوافق
با نظیر خود)۔
ونیز (بحکم حد ۲۴) قاعدهٔ دص برابراست با قاعدهٔ س ص)۔
لهذا (بحکم ش ۸) زاویهٔ (د ج ص) مساویست با زاویهٔ (س ج ص)
واین زوایا در دو جانب خط (ج ص) واقع شده اند
لهذا (بحکم حد ۱۰) هریکی ازاین زوایا یعنی (د ج ص) و (س ج ص) قائمه میباشند)
ومطلوب همین بوده است)۔

## مشق

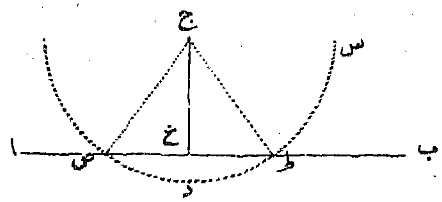
(۱) در مثلّث مفروضه ا ب ج تنصیف ضلع (ا ب) بر نقطهٔ د و تنصیف ا ج بر نقطهٔ (س) میشود و بر (ا ب) از نقطهٔ (د) عمود د ص و بر ا ج از نقطهٔ (س) عمود (س ص) قائم میشود ثابت کن که ص ا و ص ب و ص ج باهم متساویند)۔
(۲) بساز مثلّث متساوی الساقین که قائم الزاویه باشد)۔
(۳) مثلّث قائم الزاویه بساز که قاعدهٔ آن بقدر نصف وتر باشد)۔

## شکل (۱۲) عملی

بر خط مستقیم غیر محدود واز نقطهٔ معلومه که خارج ازآن خط واقع باشد عمود قائم کن




فرض کن (ا ب) خط مستقیم معلوم که امتدادِ آن از هردو طرف نامحدود است




و(ج) نقطهٔ معلومه که خارج از آن خط واقع شده است)۔

مقصود اینست که از نقطهٔ (ج) عمودی بر (اب) قائم شود)۔

وضع شکل = در جانب تحتِ (اب) معیّن کن نقطه را مثلاً (د)

و بحکم (اصول ۳) از مرکز (ج) بفاصلهٔ (ج د) بساز دائرهٔ (س ط ص) را

که با (اب) در نقاط (ص) و (ط) تقاطع نماید

و بحکم (ش ۱۰) تنصیف کن (ص ط) را بر نقطهٔ (ع)

و وصل کن (ج ع) را

لهٰذا خطِ مستقیم (ج ع) که از نقطهٔ (ج) ممتد شده است بر (اب) عمود خواهد بود)۔

ثبوت = وصل کن (ج ص) و (ج ط) را

و چون (ص ع) مساوی (ع ط) مرتسم شده است

و (ع ج) در هر دو مثلث یعنی (ص ع ج) و (ط ع ج) مشترک است

لهٰذا ضلعین (ص ع) و (ع ج) متساویند با ضلعین (ط ع) و (ع ج) متوافقاً

و بحکم (حد ۱۰) قاعدهٔ (ج ص) مساویست با قاعدهٔ (ج ط)

لهٰذا (بحکم ش ۸) زاویهٔ (ج ع ص) مساویست با زاویهٔ (ج ع ط)

واین

و این زوایا در جانبین عمود (ج ع) میباشند

لهذا (بحکم حد ۱۰) هر یکی از این زوایا یعنی (ج ع ص) و (ج ع ط) قائمه میباشند

و خطِ مستقیم که تشکیل آنها نموده است بر (اب) عمود میباشد

لهذا بر خطِ مستقیم (اب) از نقطهٔ (ج) که خارج از آن بود عمود قائم شد)

## مشق

(۱) هرگاه طول خطِ مستقیم غیر محدود نباشد بنا بر آن تماشا شکل چه نقص واقع خواهد شد)

(۲) در مثلث متساوی الاضلاع خطوطی که بر نقاطِ وسطِ اضلاع از زوایای متقابله قائم شوند ثابت کن که باهم متساوی خواهد بود)

(۳) اقطار شکلِ معین همدیگر را بزاویهٔ قائمه تقاطع نمایند)

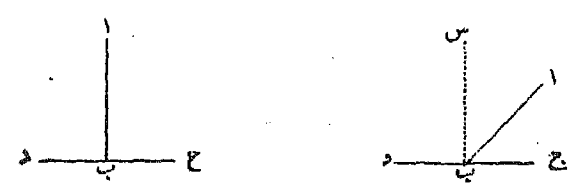
(۴) هرگاه اقطار ذو اربعة الاضلاع همدیگر را بزاویهٔ قائمه تنصیف نمایند آن شکل مربع خواهد بود)

(۵) خطوطی که تنصیف نمایند زوایای قاعدهٔ متساوی الساقین را از آنها نیز متساوی الساقین مرتسم خواهد شد)

(۶) خطوطی که نقاطِ وسطِ اضلاع متساوی الاضلاع را وصل دهند از آنها نیز متساوی الاضلاع مرتسم گردد)

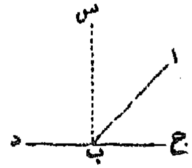
## شکل (۱۳) اثباتی

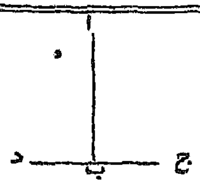
خطِ مستقیمیکه بر خطِ مستقیم دیگر در یک جهت تشکیل زوایا مینماید آن زوایا از دو حال خارج نباشد — یا هر یکی از آنها زاویهٔ قائمه میباشد و یا اینکه مجموعهٔ هر دو زاویه مساوی دو قائمه خواهند بود




فرض کن (اب) خطی است مستقیم و بر خطِ مستقیم (ج د) در یکجهت زاویهٔ (ج ب ا) و (ا ب د) را تشکیل مینماید)

بنا بر این هر یکی از این زوایا قائمه خواهد بود یا اینکه مجموعهٔ هر دو زاویه دو قائمه خواهند بود)




ثبوت = بدلیل اینکه هرگاه زاویهٔ (ج ب ا) مساوی باشد با زاویهٔ (ا ب د)
پس (بحکم حد ۱۰) هر یکی از آنها قائمه میباشد)
لیکن هرگاه زاویهٔ ج ب ا مساوی زاویهٔ (ا ب د) نباشد
پس (بحکم ش ۱۱) خارج کن بر (ج د) از نقطهٔ (ب) خط مستقیم (ب س) را که بر
(ج د) زاویه قائمه پیدا کند)
لهذا (بحکم حد ۱۰) (ج ب س) و (س ب د) دو قائمه اند
و زاویهٔ (ج ب س) مساویست با مجموعهٔ زاویتین ج ب ا و (ا ب س)
بیفزای بر هر یکی از این متساویات زاویهٔ (س ب د) را
پس (بحکم علم ۲) مجموعهٔ زاویتین (ج ب س) و (س ب د) مساویست
با مجموعهٔ ۳ زاویه
یعنی (ج ب ا) و (ا ب س) و (س ب د)
ایضاً چونکه زاویهٔ (د ب ا) مساویست با زاویتین (د ب س) و (س ب ا)
بیفزای بر هر یکی از این متساویات (ا ب ج) را
لهذا (بحکم علم ۲) زاویتین (د ب ا) و (ا ب ج) مساویند با ۳ زاویه
یعنی د ب س) و (س ب ا) و (ا ب ج لیکن در فوق ثابت و مذکور شد
که زاویتین (ج ب س) و (س ب د) مساویند بهمین ۳ زاویه

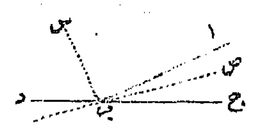
لهذا

لهذا زاویتین (ج ب س) و (س ب د) مساوی‌اند با زاویتین (د ب ا) و (ا ب ج)
ولکن (ج ب س) و (س ب د) دو قائمه میباشند
پس مجموعهٔ (د ب ا) و (ا ب ج) نیز دو قائمه میباشند)
لهذا خط مستقیمیکه بر الخ

## تفهیم

(۱) چونکه مجموعهٔ زاویتین (ا ب ج) و (ا ب د) مساوی دو قائمه اند لهذا هر یکی از زاویتین را تکملهٔ قائمتین گویند)
واما هرگاه مجموعهٔ دو زاویه مساوی یک قائمه باشد هر یکی را مکمّل قائمه گویند)
این حدود را بذهن خود بسپار :
(اوّل) متمّم یعنی مکمّل زاویهٔ حادّه آن مقدار زاویه ایست که چون منضم بحادّه شود مجموعهٔ هر دو تشکیل نمایند یک قائمه را)
مثلاً زاویتین (ا ب ج) و (ا ب س) مکمّل یکدیگرند)
(دوّم) تکملهٔ دو قائمه آن مقدار زاویه ایست که چون منضم شود بزاویهٔ معلوم مجموعهٔ آن تشکیل دو قائمه نماید)
مثلاً زاویتین (ا ب ج) و (ا ب د) تکملهٔ یکدیگرند)

(۲) خط مستقیمیکه بر خط مستقیم دیگر واقع شود و دو زاویه در دو جانب خود تشکیل نماید پس این زوایا را خطوطی که تنصیف میکنند تشکیل زاویهٔ قائمه خواهند نمود)

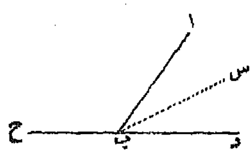



مثلاً خط مستقیم (ا ب) بر خط مستقیم (ج د) واقع و در دو جانب خود دو زاویهٔ متّصله تشکیل داده است)
یعنی زاویهٔ (ج ب ا) و (ا ب د))
این زوایا را خطوط (س ب) و (ص ب) تنصیف میکنند)
لهذا از این دو خط خط (ب ص) را منصّف داخلی و (ب س) را منصّف خارجی گویند)
پس در هر یکی از زوایا منصّف داخلی و خارجی بر قائمه متقاطع خواهند بود)

## شکل (۱۴) اثباتی

هرگاه دو خط مستقیم بر یک نقطهٔ دو خط مستقیم دیگر

از سمتِ متقابل ممتد شده اتّصال نمایند و دو زاویهٔ مساوی
دو قائمه تشکیل نمایند پس این دو خطِ مستقیم بعد از اتّصال
بر یك خطِ مستقیم واقع خواهند شد یعنی هر دو در حکم یکخطِ مستقیمند -




فرض کن بر نقطهٔ (ب) که طرفِ انتهای خطِ مستقیم (اب) میباشد
دو خطِ مستقیم (ب ج) و (ب د) از دو سمتِ متقابل ممتد شده در نقطهٔ (ب)
اتّصال نموده زاویتینِ (ا ب ج) و (ا ب د) که مجموعه آنها دو قائمه میباشد
تشکیل داده اند

لهذا (د ب) و (ب ج) در یك خطِ مستقیم واقع خواهند بود -

ثبوت = زیراکه هرگاه (ب د) مع (ب ج) بر یك خطِ مستقیم نباشند
پس در صورتِ امکان
فرض کن (ب س) با (ب ج) اتّصال نموده بر یك خطِ مستقیم واقع شده است -
درینصورت خطِ مستقیم (ا ب) با خطِ مستقیم (ج ب س) وصل میشود -
لهذا (بحکم ش ۱۳) زوایای متّصله مساوی دو قائمه میباشند -
یعنی (بموجب مفروض) زاویتین (س ب ا) و (ا ب د) باهم مساوی دو قائمه اند -
وحالانکه زاویتین (ا ب ج) و (ا ب د) هم دو قائمه میباشند -
بنابراین (بحکم علم ۲) چون زاویتین (ا ب ج) و (ا ب س) متساویند با

زاویتین (اب ج) و (اب د)

خارج کن از هر یکی از این متساویات زاویهٔ مشترکهٔ (اب ج) را

پس (بحکم علم ۳) باقی زاویهٔ (اب س) برابر است با باقی زاویهٔ (اب د)

یعنی زاویهٔ کوچک مساوی شد با زاویهٔ بزرگ و این ناممکن است)۔

لهذا (ب س) و (ب ج) در یک خطِ مستقیم واقع نباشند)۔

و نیز توان ثابت نمود که بغیر از خط مستقیم (ب د) هیچ خط مستقیمی بعد از اتّصال با (ب ج) بر یک خطِ مستقیم واقع نخواهد بود)۔

بنابراین (ب د) است که بعد از اتّصال با (ج ب) بر یک خطِ مستقیم واقع میشود)۔

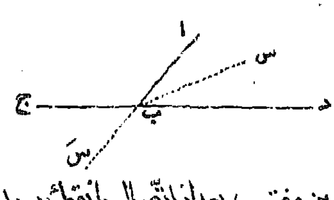
لهذا هرگاه در خطِ مستقیم بریک نقطه الخ

تفهیم

(۱) این شکل عکس شکل سیزدهم است)۔

(۲) قید دو سمتِ متقابل در آن شده است چه هرگاه این قید نباشد ممکن است که دو خطِ مستقیم با خط مستقیم ثالث دو زاویهٔ قائمه پیدا کنند و خودِ آن خطوطِ ممدوده بعد از اتصال در یک خطِ مستقیم نباشند

یعنی چنانکه خطِ (ب س) فوقانی کشیده شده است تحتانی هم توان کشید)۔



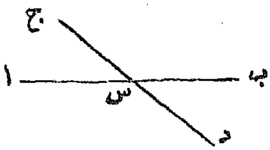

مثلاً (سَ ب) (سینِ مفتوحه) بعد از اتّصال با نقطهٔ (ب ا) دو قائمه پیدا کرده است

یعنی مجموعهٔ (سَ ب ج) و (ج ب ا) دو قائمه میباشد)

و حال آنکه (سَ ب) با (ب ج) در یک خطِ مستقیم نباشد

شکل (۱۵) اثباتی

## هرگاه دو خطِ مستقیم متقاطعِ همدیگر باشند زوایای متقابلهٔ آن باهم متساوی خواهند بود




فرض کن (اب) و (ج د) دو خط مستقیم و یکدیگر را در نقطهٔ (س) قطع می کنند
لهذا زاویهٔ (اس ج) مساوی زاویهٔ (دس ب) و نیز زاویهٔ (ج س ب) مساوی
زاویهٔ (اس د) خواهد بود) —

ثبوت = چون خطِ مستقیم (اس) بر خطِ مستقیم (ج د)
دو زاویهٔ متصله یعنی (ج س ا) و (اس د) در نقطهٔ (س) تشکیل میدهد لهذا
بحکم (ش ۱۳) مجموعهٔ این دو زاویه مساوی دو قائمه میباشد
ایضاً چونکه خط مستقیم (د س) بر خط مستقیم (اب) دو زاویهٔ متصله (اس د) و (ب س د)
در نقطهٔ (س) متشکل نموده است و بحکم (ش ۱۳) مجموعهٔ این دو زاویه هم مساوی دو قائمه
میباشد در فوق ثابت شد که مجموعهٔ زاویتین (ج س ا) و (اس د) مساوی دو قائمه میباشد
لهذا مجموعهٔ زاویتین (ج س ا) و (اس د) مساویست با دو زاویهٔ
(اس د) و (ب س د)
از هر یکی از این متساویات خارج کن زاویهٔ مشترکهٔ (اس د) را
پس (بحکم علم ۳) باقی زاویهٔ (ج س ا) مساویست با باقی زاویهٔ (د س ب)
و بهمین تفصیل ثابت میشود که (ج س ب) مساویست با زاویهٔ (اس د)

لهذا هرگاه دو خط مستقیم متقاطع الخ

**تفهیم** — از این مبحث منتج میشود

(۱) اینکه دو خط مستقیم که در یک نقطه متقاطع یکدیگر باشند در آن نقطه زوایای متشکله این دو خط مساوی چهار قائمه میباشند)م

(۲) همین طور هر قدر خطوط مستقیمه در یک نقطه متقاطع یکدیگر باشند مجموعهٔ زوایای آنها مساوی چهار قائمه میباشد)م

**مشق**

(۱) هرگاه در شکل مذکوره زاویهٔ (اس د) را (ص س) تنصیف نماید و زاویهٔ (ب س ج) را (ط س) تنصیف کند ثابت کن

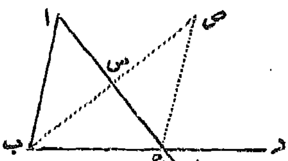
که (ص س) و (ط س) در یک خط مستقیم واقع خواهند شد)م

(۲) هرگاه در یک خط مستقیم (اب) نقطهٔ معین شود مثلاً (س) و از این نقطه دو خط مستقیم (س ج) و (س د) از دو سمت متقابل (اب) خارج شوند

قسمیکه زاویهٔ (اس ج) مساوی (ب س د) باشد ثابت کن که (س ج) و (س د) در یک خط مستقیم میباشند

## شکل (۱۶) اثباتی

هرگاه ضلع مثلثی را ممتد سازند زاویهٔ خارجه که از امتداد این ضلع پیدا شود از هر زاویهٔ داخله که مقابل واقع است اوسع خواهد بود یعنی بزرگ خواهد بود



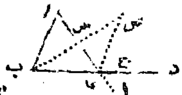

فرض کن (ا ب ج) مثلث و ضلع آن (ب ج) تا نقطهٔ (د) خارج شده است

لهذا زاویهٔ خارجه (اج د) نسبت بهر یکی از زوایای داخلهٔ (ج ب ا) و (ج ا ب) بزرگ خواهد بود که مقابل واقع شده اند)م

وضع شکل = (بحکم ش ۱۰) (اج) را بر نقطهٔ (س) تنصیف کن

وصل کن (ب س) را )م

و (بحکم ش ۳) تا نقطهٔ (ص) چنان خارج کن که (س ص) مساوی (س ب) باشد)




و وصل کن (ص ج) را)۔

ثبوت = چونکه (ا س) برابر (س ج) و (ب س) برابر (س ص) مرتسم شده است

لهذا ضلعین (ا س) و (س ب) مساویند با ضلعین (ج س) و (س ص)

موافق نظیر خود)۔

و (بحکم ش ۱۵) زاویتین (ا س ب) و (ج س ص) باهم متساویند

زیرا که متقابله میباشند)۔

لهذا (بحکم ش ۴) مثلّث (ا س ب) برابر است با مثلّث (ج س ص)

و باقی زوایاے یك مثلّث متساویند با باقی زوایای مثلّث دیگر متوافق

با نظائر خود)۔

یعنی زاویهٔ (ب ا س) برابر است با زاویهٔ (س ج ص) و (س ب) مساوی

با (س ص ج)

لکن (بحکم علم ۹) کلّ زاویهٔ (س ج د) بزرگست نسبت بزاویهٔ (س ج ص)

که جزو آن است)۔

لهذا زاویهٔ (ا ج د) اوسع باشد نسبت بزاویهٔ (ب ا س)

بهمین تفصیل هرگاه ضلع (ب ج) تنصیف شود و ضلع (ا ج) را تا

نقطهٔ (ط) خارج کنیم

ثابت خواهد شد که زاویهٔ (ب ج ط) بزرگست نسبت بزاویهٔ (ا ب ج)

و (بحکم ش ۱۵) زاویهٔ (ب ج ط) مساویست با زاویهٔ (ا ج د)

بنا برین ثابت شد که زاویهٔ (ا ج د) بزرگتر است نسبت بزاویهٔ (ا ب ج)

لهذا هرگاه ضلع مثلثی را ممتد سازند الخ)۔

## مشق

(۱) ثابت کن از یک نقطه تا بخط مستقیمی زیاده از دو خط مستقیم متساوی نتوان خارج نمود)۔

(۲) ثابت کن زوایای مجاور قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین حادّه میباشند)۔

(۳) ثابت کن هرگاه یک زاویهٔ مثلثی قائمه یا منفرجه باشد باقی زوایای آن حادّه خواهند بود)

(۴) ثابت کن از یک نقطه که خارج از خط مستقیم است زیاده از یک عمود نتوان برخط مذکور قائم نمود)۔

(۵) مثلثات آنیکه در شکل مذکور متشکل شده اند زوایای خارجهٔ آنها با کدام زاویهٔ داخله برابر شد)۔

(۶) سه مثلث بساز قسمیکه در یکی از آنها زاویهٔ خارجه برابر باشد با زاویهٔ داخله که متصل آنست و در دوّمی کوچک و در سوّمی بزرگ باشد)۔

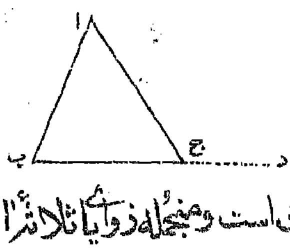
(۷) ثابت کن هرگاه در شکل (۱۶) (ا ص) موصول شود پس (ا ص) برابر است با (ب ج) و سطح مثلث (ا ب ج) برابر است با سطح مثلث (ا ج ص)

(۸) موافق نتیجهٔ فوق بریک قاعده قائم کن سلسلهٔ مثلثات را قسمیکه سطوح آنها باهم متساوی و دو آنها متساوی الابعاد باشند از حیث ارتفاع)۔

(۹) زاویهٔ راس مثلث متساوی الساقین گاه حادّه میباشد وگاه منفرجه وگاهی قائمه)۔

## شکل (۱۷) اثباتی

مجموعهٔ زاویتین هر مثلث از دو قائمه کمتر میباشد

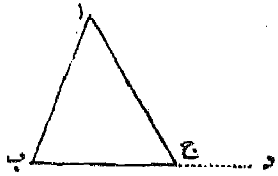



فرض کن (ا ب ج) مثلث است و منجمله زوایای ثلاثه آن

مجموعهٔ دو زاویه کمتر از دو قائمه خواهد بود یعنی مجموعهٔ (ا ب ج) و (ا ج ب)

کمتر است نسبت بدو قائمه)۔

وضع شکل:- خارج کن (ب ج) را تا نقطهٔ (د)




ثبوت = چون (اج د) زاویهٔ خارجهٔ مثلث (ا ب ج) است

لهذا (بحکم ش ۱۶) نسبت بزاویهٔ داخله یعنی (ا ب ج) اعظم است —

بیفزای بر هر یکی از این غیر متساویات زاویهٔ (اج ب) را

لهذا مجموعهٔ زاویهٔ (اج د) و (اج ب) زیاده است نسبت بزاویتین (ا ب ج) و (اج ب)

وچون (بحکم ش ۱۳) مجموعهٔ زاویتین (اج د) و (اج ب) مساوی دو قائمه میباشد

لهذا مجموعهٔ زاویتین (ا ب ج) و (ب ج ا) کمتر است نسبت بدو قائمه —

بهمین تفصیل ثابت توان نمود که مجموعهٔ زاویتین (ب اج) و (ا ب ج) کمتر است از دو قائمه —

ونیز مجموعهٔ دو زاویه یعنی (ج ا ب) و (اج ب) کمتر است از دو قائمه —

لهذا مجموعهٔ زاویتین هر مثلث الخ

## مشق

(۱) هرگاه در مثلثی دو زاویه غیر متساوی باشند اصغر آن حادّه خواهد بود —

(۲) هر مثلثی را مجموعهٔ دو زاویهٔ خارجه از دو قائمه بیشتر است ونیز مجموعهٔ سه زاویه خارجه از سه قائمه بیشتر —

(۳) ثابت کن در مثلث غیر ممکن است دو زاویهٔ قائمه باشد — ونه دو منفرجه — ونه یک منفرجه و یک قائمه

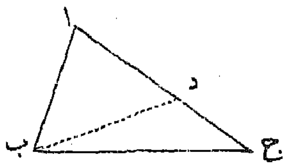
(۴) ثابت کن هر یکی از دو زاویه واقع بر قاعدهٔ متساوی الساقین حادّه میباشد —

(۵) در مثلث قائمة الزاویه از زاویه قائمه / در مثلث منفرج الزاویه از زاویهٔ منفرجه / در مثلث حادّة الزاویه از زاویهٔ حادّه } عمودیکه بر ضلع مقابل کشیده شود درون مثلث خواهد بود

(٦) در مثلث منفرج الزاویه عمودیکه از زاویهٔ حاده بر ضلع مقابل کشیده شود از مثلث بیرون واقع خواهد بود

## شکل (۱۸) اثباتی

هرگاه یك ضلع مثلثی اطول باشد نسبت بضلع دیگر پس زاویهٔ که مقابل ضلع اطول است اعظم خواهد بود نسبت بزاویهٔ که مقابل ضلع اقصر است




فرض کن (ا ب ج) مثلث و ضلع آن (ا ج) اطول است نسبت بضلع (ا ب)

لهذا زاویهٔ (ا ب ج) اعظم خواهد بود نسبت بزاویهٔ (ا ج ب)

وضع شکل = (بحکم ش ۳) در ضلع (ا ج) که اطول است معین کن مقطع (ا د) را بمساوی (ا ب)

وصل کن (ب د) را

ثبوت = چونکه زاویهٔ (ا د ب) زاویهٔ خارجی مثلث (ب د ج) شد

لهذا (بحکم ش ۱۶) اعظم است نسبت بزاویهٔ (د ج ب)

ولکن (بحکم ش ۵) زاویهٔ (ا د ب) برابر است با زاویهٔ (ا ب د)

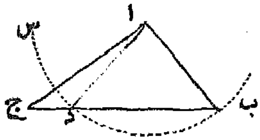
بدلیل اینکه ضلع (ا د) بمساوی (ا ب) فرض شده است

بنابراین زاویهٔ (ا ب د) بزرگست از زاویهٔ (ا ج ب)

پس (بحکم علم ۹) زاویهٔ (ا ب ج) بدرجهٔ اولی اعظم است از زاویهٔ (ا ج ب)

لهذا هرگاه یك ضلع مثلثی الخ

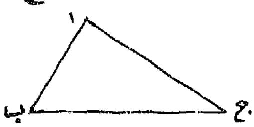
تفهیم = بعضی از مهندسین دعوی مذکوره را بر این قسم ثابت کنند




مثلاً از مرکز ا و بنیم قطر اب رسم کن دائره ب د س را
قسمی که ب ج را بر نقطهٔ د قطع نماید
وصل کن ا د را ؎
چونکه اب مساوی اد است لهذا زاویهٔ ا د ب برابر است با زاویهٔ ا ب د ؎
ولکن (بحکم ش ۱۶) زاویهٔ ا د ب اعظم است از زاویهٔ ا ج ب ؎
لهذا زاویهٔ ا ب د اعظم است از زاویهٔ ا ج ب ؎

## شکل (۱۹) اثباتی

در هر مثلث مقابل زاویهٔ بزرگ ضلع بزرگ واقع میشود




فرض کن ا ب ج مثلث است و زاویهٔ ا ب ج اعظم است از زاویهٔ ا ج ب

لهذا ضلع ا ج اطول خواهد بود نسبت بضلع ا ب ؎

ثبوت = بدلیل اینکه هرگاه ا ج اطول نباشد باید که مساوی

(ا ب) یا اینکه اقصر از (ا ب) باشد

در صورتیکه (ا ج) مساوی (ا ب) باشد ؎

پس (بحکم ش ۵) می باید زاویهٔ (ا ب ج) برابر باشد با زاویهٔ (ا ج ب) ؎

لکن مفروض چنین نیست ؎

بنا براین ثابت شد که اج مساوی اب نباشد )۔

واما در صورتیکه اج اقصر باشد نسبت با اب )۔

پس (بحکم ش ۱۸) میباید زاویهٔ ابج کوچك باشد نسبت بزاویهٔ اجب )

ولکن مفروض نه اینست )۔

لهٰذا معلوم شد که اج اقصر هم نیست از اب )۔

پس ثابت شد که اج اطول است نسبت با اب )۔

لهٰذا در هر مثلثی مقابل زاویه الخ

**مشق**

( این شکل عکس شکل ۱۸ میباشد )۔

(۱) وتر مثلث قائم الزاویه اطول است نسبت بهر ضلع آن )۔

(۲) در مثلث منفرج الزاویه ضلع مقابل زاویهٔ منفرجه اطول نسبت بهر ضلع آن )۔

(۳) وتر مستطیل و وتر مربع اطول است نسبت بهر ضلع آن )۔

(۴) هرگاه یك ضلع مربع ممتد شود و در آن نقطهٔ معیّن شود و از رأس زاویهٔ مقابل خطی تا بآن نقطه خارج شود آن خط از وتر مربع اطول خواهد بود )۔

(۵) از یك نقطه نتوان تا بخط مستقیم سه خط متساوی خارج نمود )۔

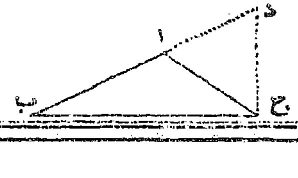
(۶) از رأس مثلث متساوی الساقین تا هر نقطه در قاعده هرگاه خطی کشیده شود از یك ساق آن اقصر خواهد بود مگر آن نقطه هرگاه در قاعدهٔ ممدوده باشد خط مذکور اطول خواهد بود )۔

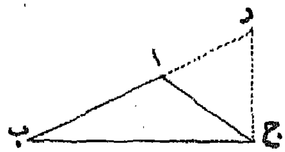
(۷) اگر ابج مثلثی باشد که در آن ضلع اب نسبت با اج اطول نباشد و بر یك نقطهٔ از بج مثلاً د خط اد کشیده شود پس آن خط نسبت با اج اقصر خواهد بود )۔

(۸) هرگاه از زاویهٔ رأس مثلثی عمودی بر قاعده خارج شود و مثلث را در دو قسمت غیر متساوی تقسیم نماید قسمت بزرگ آن متصل بضلع اطول خواهد بود )۔

## شکل (۲۰) الثانی

مجموعهٔ ضلعین از اضلاع ثلاثهٔ هر مثلثی زیاده است نسبت بضلع سوم آن






فرض کن (ا ب ج) مثلثی است و مجموعهٔ ضلعین آن اطولست نسبت بضلع سوّم

یعنی مجموعه (ب ا) و (ا ج) زیاده است نسبت با (ب ج)

ونیز مجموعهٔ (ا ب) و (ب ج) زیاده از (ا ج)

و مجموعه (ب ج) و (ج ا) زیاده از (ا ب)

وضع شکل = (بحکم ش ۳) (ب ا) را تا بنقطهٔ (د) چنان خارج کن

که (ا د) بمساوی (ا ج) باشد

وصل کن (د ج) را

ثبوت = چونکه (ا د) بمساوی (ا ج) مرتسم شده است

لهذا (بحکم ش ۵) زاویهٔ (ا د ج) بمساوی زاویهٔ (ا ج د) میباشد

ولکن (بحکم علم ۹) زاویهٔ (ب ج د) اعظم است نسبت بزاویهٔ (ا ج د) که جزو آن است

بنابراین زاویهٔ (ب ج د) بزرگست از زاویهٔ (ب د ج)

وچونکه در مثلث (د ب ج) زاویهٔ (ب ج د) بزرگست نسبت بزاویهٔ (ب د ج)

ونیز (بحکم ش ۱۹) مقابل زاویهٔ بزرگ ضلع بزرگ واقع میشود

لهذا ضلع (ب د) اطولست از ضلع (ب ج)

ولکن (ب د) بمساوی ضلعین (ب ا) و (ا ج) است

از این جهت مجموعهٔ (ب ا) و (ا ج) زیاده است از (ب ج)

وبهمین تفصیل ثابت توان نمود که مجموعهٔ (اب) و (بج) اطول است از (اج)

وکذلک مجموعهٔ ضلعین (بج) و (ج ا) اطول نسبت با (ا ب)

لهذا مجموعهٔ ضلعین از اضلاع الخ

## مشق

(۱) درشکل هفتم مجموعهٔ (اد) و (بج) اطول است نسبت با (اج) و (ب د)
(۲) (در دائره قطر اطول است نسبت به هر خط مستقیمیکه در دائره واقع شود و قطر نباشد)
(۳) (مجموعهٔ سه ضلع هر شکل ذوار بعة الاضلاع نسبت بضلع چهارم اطول است)
(۴) نصف مجموعهٔ اضلاع مثلث نسبت به هر ضلع آن اطول و نسبت بضلعین آن اقصر میباشد
(۵) درشکل ذوار بعة الاضلاع مجموعهٔ دو وتر اطول است نسبت به نصف مجموعهٔ اضلاع آن و مجموعهٔ اضلاع آن اطول نسبت بوترین آن و اقصر است نسبت بدو چند مجموعهٔ وترین
(۶) درشکل ذوار بعة الاضلاع مجموعهٔ دو وتر اقصر است نسبت بمجموعهٔ خطوط اربعهٔ که از یک نقطه تا بزوایای آن خارج شود (نقطهٔ تقاطع وترین مستثنی است)

## شکل (۲۱) اثباتی

هرگاه از نقاط طرفین ضلعی از مثلثه دو خط مستقیم ممتد شوند تا بنقطهٔ که در آن مثلث واقع باشد پس مجموعهٔ آن دو خطِ ممدوده نسبت بمجموعهٔ دو ضلع مثلث کمتر خواهد بود

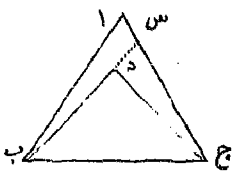



فرض کن (ا ب ج) مثلثی است که از نقاط طرفین ضلع (ب ج)

یعنی از نقطهٔ (ب) و (ج) دو خطِ مستقیم (ب د) و (ج د) الی النقطهٔ (د)

که در مثلث واقع شده است ممتد شده اند)

پس مجموعهٔ (ب د) و (ج د) نسبت بمجموعهٔ ضلعین (ب ا) و (ا ج) کمتر خواهد بود




ولکن زاویهٔ وسطی یعنی (ب د ج) بزرگ خواهد بود نسبت بزاویهٔ (ب ا ج)

وضع شکل = خارج کن (ب د) را که در نقطهٔ (س) با (ا ج) وصل شود

ثبوت = چونکه (بحکم ش ۲) مجموعهٔ ضلعین هر مثلث اطول است نسبت بضلع سوّم

لهذا مجموعهٔ ضلعین (ب ا) و (ا س) هر مثلث (ب ا س) اطول است نسبت با (ب س)

بیفزای بر هر یکی از این غیر متساویین (س ج) را

پس (بحکم علم ۴) مجموعهٔ (ب ا) و (ا ج) اطول است نسبت بمجموعهٔ (ب س) و (س ج)

و (بحکم ش ۲) مجموعهٔ ضلعین (ج س) و (س د) اطول است نسبت بضلع سوّم (ج د)

بیفزای بر هر یکی از این غیر متساویین (ب د) را

پس (بحکم علم ۴) مجموعهٔ ضلعین (ج س) و (س ب) اطول است نسبت بمجموعهٔ (ج د) و (د ب)

لهذا هرگاه از نقاط طرفین الخ

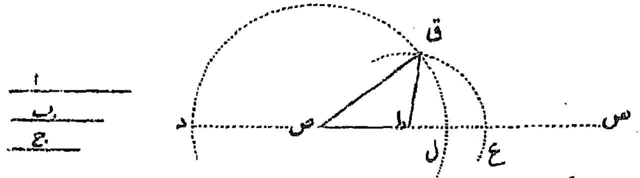
مشق

(۱) مجموعهٔ خطوطی که از زوایای مثلث تا هر نقطهٔ که دران واقع هست خارج شده باشند اطولست نسبت بنصف مجموعهٔ اضلاع آن ؎

(۲) در شکل (۱٦) زاویهٔ (ب ص ج) کمتر است از زاویهٔ (ا ب ج) پس هر گاه تغییر داده شود هیئت شکل در چه صورتی زاویهٔ مذکوره مساوی نصفِ زاویهٔ (ا ب ج) خواهد شد

## شکل (۲۲) عملی

مثلثی بسا که اضلاع ثلاثهٔ آن مساوی باشند باسه خط مستقیم مفروض و مجموعهٔ دو خط از آن سه خط زیاده باشد نسبت بخط سوم




فرض کن (ا) و (ب) و (ج) سه خطِ مستقیم مفروض که مجموعهٔ دو خطِ آن اطول است نسبت بخطِ سوم ؎

یعنی مجموعهٔ (ا) و (ب) اطول است از (ج)

و مجموعهٔ (ا) و (ج) اطول از (ب) و نیز (ب) و (ج) اطول از (ا)

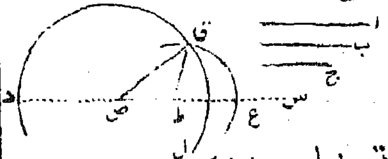
مطلوب اینست مثلثی مرتسم شود که اضلاع ثلاثهٔ آن برابر باشند باسه خطِ مفروض (ا) و (ب) و (ج) موافق نظیر خود ؎

وضع شکل = خارج کن خطِ مستقیم (د س) را که طرفِ نقطهٔ (د) منتهی باشد ولکن بطرفِ (س) غیر منتهی ؎

(بحکم شر ۳) معین کن (د ص) را برابرِ (ا)

و (ص ط) را برابر (ب) و (ط ع) را مساوی (ج)

و (بحکم اصول ۳) از مرکز (ص) بفاصلۂ (ص د) بساز دائرہ (د ق ل) را
و از مرکز (ط) بفاصلۂ (ط ع) بنا دائرہ (ع ق) را کہ دائرہ اوّل را بر نقطۂ (ق)
قطع نماید)۔




وصل کن (ق ص) و (ق ط) را)۔
لهذا (ق ص ط) مثلّث مطلوب مرتسم خواهد شد)۔
کہ اضلاع ثلاثہ آن مساوی خواهند بود با خطوط معلومہ (ا) و (ب) و (ج)

ثبوت = چونکہ (ص) مرکز دائرہ (د ق ل) است
لهذا بحکم حدّ (۱۵) (ص د) مساویست با (ص ق)
لکن (ص د) بمساوی (ا) معیّن شدہ است
پس بحکم علم (۱) (ص ق) بمساوی (ا) میباشد)۔
و چونکہ (ط) مرکز دائرہ (ع ق) است
لهذا (بحکم حد ۱۵) (ط ع) مساوی است با (ط ق)
لکن (ط ع) بمساوی (ج) است
لهذا (بحکم علم ۱) (ط ق) بمساوے (ج) می باشد)۔
و امّا (ص ط) برابر (ب) خارج شدہ است
بنا برین خطوط مستقیمہ (ق ص) و (ص ط) و (ط ق) مساویند با خطوط مستقیمہ
(ا) و (ب) و (ج)
لهذا مثلّث (ق ص ط) کہ اضلاع آن متساویند با خطوط ثلاثۂ
مفروضہ متوافق بانظائر خود مرتسم گردید و مراد همین بودہ)۔

تفهیم

**تفهیم** = در این دعوی مذکور شده است که مجموعهٔ دو خط اطول باشد نسبت بخطِ ثالث. هرگاه این شرط نباشد یعنی مجموعهٔ دو خط مساوی خط سوم یا کمتر از آن باشد تشکیلِ مثلث مطلوب در هر دو صورت غیر ممکن است ـ اندکی تامّل و حل کن این عقده را

**مشق**

(۱) ثابت کن هرگاه مجموعهٔ دو خط کمتر از خطِ سوم باشد تقاطع دائرتین واقع نخواهد شد۔

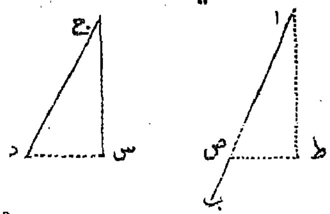
(۲) ثابت کن هرگاه پس از اجرای عمل مماس دائرتین واقع شود مجموعهٔ دو خط را با خطِ سوم چه نسبت خواهد بود۔

(۳) ثابت کن آیا ممکن است موافق شرائطی که در دعوی مذکور است اقسام دیگر از مثلثات متشکل گردد۔

(۴) هرگاه (ا) و (ب) و (ج) باهم متساوی باشند بما چه نوع از مثلث تشکیل یابد۔

## شکل (۲۳) عملی

### در خط مستقیم مفروض و یک نقطهٔ بساز زاویهٔ مستقیمة الخطین که مساوی باشد با زاویهٔ مستقیمة الخطین مفروض



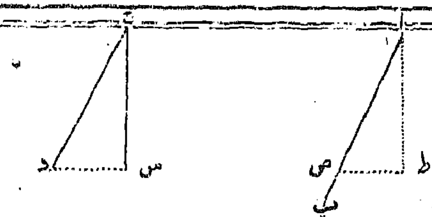

فرض کن (اب) خط مستقیم مفروض و (ا) نقطهٔ مفروضه و (د ج س) زاویهٔ مستقیمة الخطین معلوم است۔

مطلوب اینست که بر نقطهٔ (ا) که در خط مستقیم (اب) میباشد زاویهٔ متشکل شود و مساوی باشد با زاویهٔ مستقیمة الخطین معلوم یعنی (د ج س)

وضع شکل = در خطینِ (ج د) و (ج س) معین کن نقطهٔ (د) و نقطهٔ (س) را۔

وصل کن (د س) را

و (بحکم شکل ۲۲) بساز مثلثِ (ا ص ط) را




قسمیکه اضلاع ان متساوی باشند باخطوطِ ثلاثه ج د و دس و سج
بطریقیکه اص بمساوی ج د و ص ط بمساوی دس و طا بمساوی سج باشد
لهذا زاویهٔ ص اط برابرِ زاویهٔ د ج س خواهد بود

ثبوت = بدلیل اینکه ضلعین ص ا و اط برابرند با ضلعینِ دج
و ج س موافق نظیر خود
وقاعدهٔ طص بمساوی قاعدهٔ س د مرتسم
پس بحکم ش ٨ زاویهٔ ص اط مساویست بازاویهٔ (د ج س)
لهذا بر نقطهٔ معلومهٔ ا که در خطِ اب واقع شده است زاویهٔ
ص اط بمساوی زاویهٔ مستقیمة الخطین معلومه یعنی د ج س
مرتسم کردید — وهو المراد

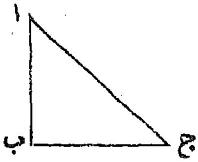
## مشق

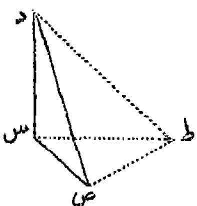
(١) مثلثی بسازکه دو ضلع مع یک زاویهٔ ان معلوم باشد
(٢) مثلثی بسازکه قاعدهٔ ان مساوی باشد با قاعدهٔ مثلثِ معلوم ولکن زاویهٔ راس ان
بزرگ باشد نسبت بزاویهٔ راس مثلث معلوم
(٣) مثلثی بسازکه قاعدهٔ ان مساوی باشد با قاعدهٔ مثلثِ معلوم ولکن زاویهٔ راس ان کوچک
و مجموعهٔ ضلعینِ ان اقصر باشد نسبت بزاویهٔ راس و مجموعهٔ ضلعینِ مثلثِ معلوم

## شکل (٢٤) اثنا لی

هرگاه در دو مثلث ضلعین یک مثلث متساوی باشند با
ضلعین مثلث دیگر هر یک موافق نظیر خود و در یک مثلث زاویهٔ وسطی ضلعین معلوم اعظم باشد

نسبت بزاویهٔ وسطی ضلعین معلوم مثلّث یکی نیز زاویهٔ مثلثی که اعظم
باشد قاعدهٔ آن نسبت بقاعدهٔ مثلّث دیگر اطول خواهد بود






فرض کن ابج و دس ص دو مثلّث

وضلعین آن (اب) و (اج) برابرند با ضلعین (دس) و (دص) هر یکی موافق بالنظیر خود

یعنی (اب) برابر (دس) و (اج) برابر (دص)

لکن زاویهٔ (باج) اعظم از زاویهٔ (س دص) میباشد

لهذا قاعدهٔ (بج) اطول است از قاعدهٔ (س ص)

فرض کن در ضلعین (دس) و (دص) ضلع (دس) نسبت با (دص) اطول نباشد

وضع شکل = (بحکم ش ۲۳) بر نقطهٔ (د) که از خط (دس) است بنا زاویهٔ (س د ط) را

که برابر باشد بازاویهٔ (ب اج)

و (بحکم ش ۳) خارج کن (د ط) را مساوی (اج) یا (دص)

وصل کن (س ط) و (ط ص) را

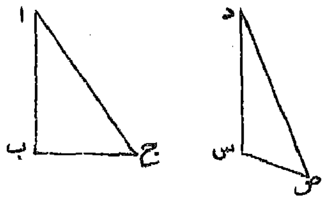
ثبوت = بنا براین (بموجب مفروض) (دس) مساوی (اب) و نیز

(د ط) مساوی (اج) مرتسم شده است

چه دایرۂ مرتسم شاهد حال است)۔
لهذا در مثلثین (س د ط) و (س د ص) زاویۂ (س د ط) اعظم است از زاویۂ (س د ص)
لهذا قاعدۂ (س ط) اطول است نسبت بقاعدۂ (س ص)
در اینصورت نقطۂ (ص) فوق (س ط) واقعشده است)۔
واما در مثلثین (س د ع) و (س د ط) زاویۂ (س د ع) اعظم است از زاویۂ (س د ط)
لهذا قاعدۂ (س ع) اطول است نسبت بقاعدۂ (س ط)
در اینصورت نقطۂ (ط) کہ جای (ص) را گرفته است روی خط واقع شده است
واما در مثلثین (س د ق) و (س د ع) خود قیاس کن)۔
لهذا هرگاه در دو مثلث ضلعین یك مثلث الخ

## شکل (۲۵) اثباتی

هرگاه در دو مثلث ضلعین یك مثلث متساوی باشند با ضلعین مثلث دیگر موافق نظیر خود و قاعدۂ یك مثلث اطول باشد نسبت بقاعدۂ مثلث دیگر پس زاویۂ وسطیٰ ضلعین مثلثی که قاعده اش اطول است اعظم خواهد بود نسبت بضلعین مثلث دیگر که قاعده اش اقصر است




فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلث اند

وضلعین یك مثلث (ا ب) و (ا ج) متساوی اند با ضلعین (د س) و (د ص) متوافق بانظائر خود

یعنی (ا ب) برابر است با (د س) و (ا ج) با (د ص)

لکن قاعدۂ (ب ج) اطول است از قاعدۂ (س ص)

لهذا زاویۂ (ب ا ج) اعظم است از زاویۂ (س د ص)

ثبوت = بدلیل اینکه هرگاه زاویهٔ ب اج بزرگ نباشد از زاویهٔ س د ص لازم میاید که مساوی باشد یا اینکه کوچک باشد نسبت بزاویهٔ (س د ص)

لکن زاویهٔ (ب اج) مساوی نیست با زاویهٔ (س د ص)



زیرا که هرگاه چنین باشد

پس (بحکم ش ۲۴) میباید قاعدهٔ ب ج مساوی باشد با قاعدهٔ (ص س)

وحال آنکه (بموجب مفروض) چنین نیست



وکذلک کوچک هم نیست چه هرگاه کوچک باشد

پس (بحکم ش ۲۴) می باید قاعدهٔ (ب ج) اقصر باشد از قاعدهٔ (س ص)

ولکن (بموجب مفروض) چنین است

یعنی زاویهٔ (ب اج) کوچک نباشد نسبت بزاویهٔ (س د ص)

و در فوق ثابت شد که زاویهٔ (ب اج) مساوی هم نیست با زاویهٔ (س د ص)

پس زاویهٔ (ب اج) اعظم است از زاویهٔ (س د ص)

لهذا هرگاه در دو مثلث ضلعین الخ

**تفهیم** = نسبت شکل (۲۴) با شکل (۲۵) همانست که شکل پنجم و ششم با هم

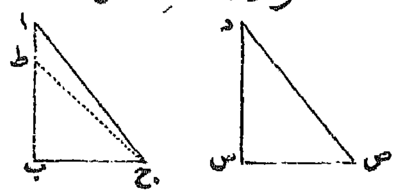
**مشق**

(۱) هرگاه از راس مثلث (ا ب ج) تا نقطهٔ وسط قاعدهٔ (ب ج) خط (ا ط) کشیده شود ثابت کن که متشکل شدن زاویهٔ (ا ط ب) منفرجه یا حاده موقوف است باطول یا اقصر بودن (ا ب) نسبت با (ا ج)

(۲) در شکل ذوار بعة الاضلاع (ا ب ج د) هرگاه (ا ب) مساوی (د ج) باشد ولکن (ا ج) اطول باشد نسبت بقطر (د ب)
ثابت کن که زاویه (ا ب د) کوچک است نسبت بزاویهٔ (ب د ج) و زاویهٔ (ب اج) اعظم است نسبت بزاویهٔ (ا ج د)

| | | |
|---|---|---|
| | شکل (۲۶) اثباتی | |

هرگاه در دو مثلّث زاویتین یك مثلّث مساوی باشند بازاویتین مثلّث دیگر موافق نظیر خود ویك ضلع یك مثلّث مساوی باشد بایك ضلع مثلّث دیگر واین ضلعین متساوی متّصل باشند بزوایای متساویه خواه مقابل در هردو صورت باقی ضلعین هر مثلّث علی التناظر متساوی خواهند بود وزاویهٔ سوّم ازیك مثلّث مساوی خواهد بود بازاویهٔ سوّم ازمثلّث دیگر




فرض کن ابج و دسص دو مثلّث معلوم اند وزاویتین هریکی موافق نظیر خود متساویند ۞

یعنی زاویهٔ ا ب ج برابراست بازاویهٔ د س ص وزاویهٔ ب ج ا برابراست بازاویهٔ س ص د ۞

ویك ضلع مثلّث هم مساویست بایك ضلع مثلّث دیگر ۞

(اوّل) چنین فرض نما که این دو ضلع متساوی از دو مثلّث متّصلند بزوایای متساویه

یعنی ضلع (ب ج) مساویست باضلع (س ص)

لهذا باقی ضلعین هر مثلّث علی التناظر باهم متساوی خواهند بود

یعنی (اب) برابر با (دس) و (اج) برابر با (دص) ۞

وزاویهٔ سوّم یعنی (ب اج) مساوی خواهد بود بازاویهٔ (س د ص)




درصورتیکه (اب) برابرِ (دس) نباشد

پس میباید یکی ازاینها ازدیگری اطول باشد)۔

هرگاه ممکن است تصوّرنما که (اب) اطولست نسبت با (دس)

وضع شکل = (بحکم ش ۳) قطع کن (ب ط) را مساوی (س د)

وصل کن (ج ط)

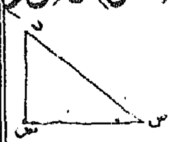
ثبوت = پس درمثلّثینِ (ط ب ج) و (د س ص) ضلعِ (ط ب)

مساوی (دس) خارج شده است)۔

و (بموجب مفروض) (ب ج) مساوی (س ص) است

لهذا ضلعین (ط ب) و (ب ج) مساویند باضلعین (د س) و (س ص)

موافق نظیرخود




وزاویهٔ (ط ب ج) مساوی بازاویهٔ (د س ص)

لهذا (بحکم ش ۴) مثلّثینِ (ط ب ج) و (د س ص) باهم متساویند

وزوایا که مقابل اضلاع متساویه واقعند هریکی بانظیرخود متساوی

دراینصورت زاویهٔ (ط ج ب) برابرشد بازاویهٔ (د ص س)

لکن (بموجب مفروض) زاویهٔ (د ص س) مساویست بازاویهٔ (ا ج ب)

پس (بحکم علم ۱) (ط ج ب) هم مساوی شد بازاویهٔ (ا ج ب)

یعنی زاویهٔ کوچک مساوی زاویهٔ بزرگ

واین اثبات غیرممکن است که جزو مساوی کل باشد)۔

لهذا ثابت شد که (اب) و (دس) غیر متساوی نباشند

یعنی باهم متساویند

و (بموجب مفروض) (بج) بمساوی (سص) است

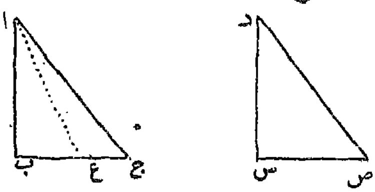
لهذا ضلعین (اب) و (بج) مساویند با ضلعین (دس) و (سص) موافق نظیر خود

ایضاً (بموجب مفروض) زاویۂ (ابج) مساویست بازاویۂ (دسص)

لهذا (بحکم شرط) قاعدۂ (اج) برابر است با قاعدۂ (دص)

و زاویۂ سوم یعنی (باج) مساویست بازاویۂ (سدص)

(دوم) چنین فرض نما کہ این دو ضلع متساوی از دو مثلث مقابل بلند بازوایای متساویہ



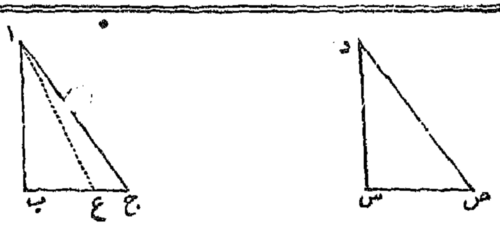

یعنی (اب) مساویست با (دس)

درین صورت هم باقی ضلعین هر مثلث علی التناظر باهم متساوی خواهند بود

یعنی (اج) بمساوی (دص) و (بج) بمساوی (سص)

و زاویۂ سوم یعنی (باج) برابر زاویۂ (سدص) خواهد بود

درصورتیکه (بج) بمساوی (سص) نباشد می باید یکی از اینها اطول باشد نسبت بدیگری




تصوّر نما (ب ج) اطول است از (س ص)۔

وضع شکل = (بحکم ش ٣) (ب ع) را بمساوی (س ص) قطع کن

وصل کن (ا ع) را۔

ثبوت = در مثلثین (ا ب ج) و (د س ص) چونکه (ب ع) بمساوی

(س ص) مرتسم شده است

لهذا ضلعینِ (ا ب) و (ب ع) مساویند با ضلعینِ (د س) و (س ص)

موافق نظیر خود۔

و زاویهٔ (ا ب ع) برابر است بازاویهٔ (د س ص)

لهذا (بحکم ش ٤) مثلّثِ (ا ب ع) برابر است با مثلّث (د س ص)

لابدّ مقابلِ اضلاعِ متساویہ زوایا باہم مساویند ہر یکی موافق نظیر خود

بنابراین زاویهٔ (ب ع ا) مساوییت بازاویهٔ (س ص د)

لکن (بموجب مفروض) زاویهٔ (س ص د) مساوییت بازاویهٔ (ب ج ا)

پس (بحکم ع ا) (ب ع ا) برابر است بازاویهٔ (ب ج ا)۔

یعنی در مثلّث (ا ع ج) زاویهٔ خارجهٔ (ب ع ا) مساوی باشد بازاویهٔ داخلهٔ

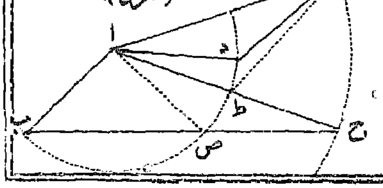
(ب ج ا) که در مقابل واقع شده است۔

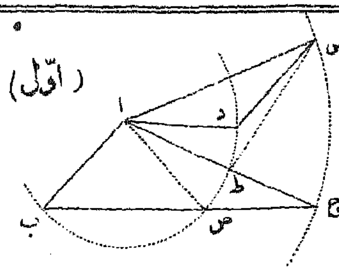
ولکن (بحکم ش ١٦) اثباتِ این تصوّر غیر ممکن است۔

از این جهت ثابت شد که (ب ج) و (س ص) غیر متساوی نباشند )ـ
یعنی باهم متساویند )ـ
و (بموجب مفروض) (ا ب) مساویست با (د س )
لهٰذا ضلعینِ (ا ب) و (ب ج) برابرند با ضلعینِ (د س) و (س ص)
موافق نظیر خود )ـ
ایضًا (بموجب مفروض) زاویهٔ وسطیِ (ا ب ج) مساویست بازاویهٔ وسطی (د س ص)
پس (بحکم ش ٤) قاعدهٔ (ا ج) برابراست باقاعدهٔ (د ص )ـ
وزاویهٔ سوّم یعنی (ب ا ج) مساویست بازاویهٔ سوّم (س د ص)
لهٰذا هرگاه در دو مثلث زاویتین الخ (در هر دو صورت انطباق واقع شود)

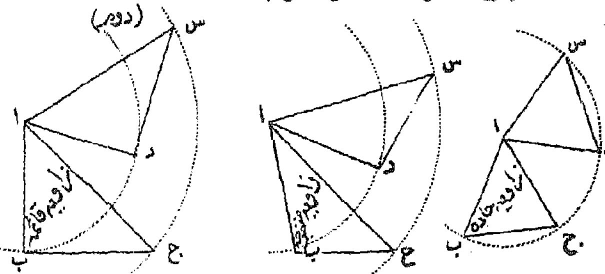
**تفهیم** = در اقلیدس از شکل اوّل تا شکل ٢٦ فصلی است علیحده
و در این فصل نتائج عظیمه را در شکل ٤ — ٨ — و ٢٦ بیان کرده است
ملخّص آن اینست که هرگاه سه جزو یک مثلث ( بترتیبیکه در مباحث آن اشکال مذکور است) مساوی باشند با سه جزو مثلث دیگر متوافق بانظائر خود
پس هر دو مثلث باهم متساوی خواهند بود )ـ
یعنی بر یکدیگر منطبق خواهند شد )ـ
ومراد از جزو مثلث زاویه است یا ضلع آن )ـ
امّا هرگاه رعایت ترتیب ملحوظ نباشد ممکن است سه زاویهٔ مثلثی علی التناظر مساوی باشند با سه زاویهٔ مثلث دیگر و حال آنکه سطوح آنها باهم متساوی نباشند چنانکه بعد از این در محل خود مذکور شود )ـ
ونیز ممکن است دو ضلع و یک زاویهٔ مثلثی علی التناظر مساوی باشند با دو ضلع و یک زاویهٔ مثلث دیگر و هر دو مثلث باهم متساوی نباشند )ـ
یعنی منطبق نشوند چنانچه از این شکل توان دریافت

( اوّل )






مثلاً در دو مثلّث (ا ب ج) و (ا د س) ضلع (ا ب) یا (ا ص) منقوطه مساویست با ضلع (ا د) و ضلع (ا ج) مساویست با ضلع (ا س)
و زاویهٔ (ا ج ب) (در صورتیکه فرض شود قاعدهٔ (س د) مساویست با قاعدهٔ (ج ص)) بمساوی زاویهٔ (ا س د) است
یعنی سه جزو یك مثلّث مساویند با سه جزو مثلّث دیگر موافق نظیر خود
مع ذالك مثلّثین باهم متساوی نباشند ؎
ولکن در بعضی حالات انطباق اشکال واقع شود
لهذا ذکر آن برای بصیرت مستدیان انسب مینماید
و از این اشکال استفاده توان نمود ؎

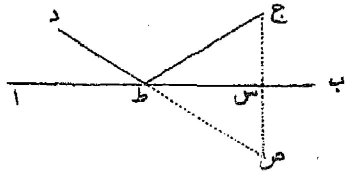



هرگاه دو ضلع و یك زاویهٔ مثلّثی مساوی باشد با دو ضلع و یك زاویهٔ مثلّث دیگر موافق نظیر خود
و این زاویه قائمه باشد منفرجه باشد یا حادّه در هر سه صورت مثلّثین باهم متساوی خواهند بود
مثلاً هرگاه ضلعین (ا ب) و (ا ج) مساوی باشند با ضلعین (ا د) و (ا س) موافق نظیر خود
و زاویهٔ معلومهٔ (ب) مساوی باشد با زاویهٔ (د)
پس هر دو مثلّث باهم متساوی خواهند بود ؎
یعنی منطبق خواهند شد ؎
استنباط این اشکال محوّل است بور زش افکار مبتدیان ؎
ولکن این دو مطلب را اجمالاً بحافظهٔ خود باید سپرد ؎
(اوّل) هرگاه ضلعین یك مثلّث علی التناظر متساوی باشند با ضلعین مثلّث دیگر
و زوایای متشکّلهٔ این زوجین نیز باهم متساوی باشند

پس ضلعِ سوّم و باقی زوایای هر دو مثلث باهم متساوی خواهند بود)۔
یعنی انطباق واقع شود (این مطلب عکس شکل ۲۶ میباشد)
(۲۷) هرگاه ضلعین یك مثلث علی التناظر متساوی باشند با ضلعینِ مثلث دیگر
ولکن زوایای مشکّلۂ زوجین مذکور باهم متساوی نباشند
پس ضلعِ سوّم و (دریك حالتی) باقی زوایای هر دو مثلث باهم غیر متساوی خواهند بود)
یعنی انطباق واقع نخواهد شد)۔
مراد از حالت اینست که هر شش زاویۂ مثلثین باهم متساوی نباشند)۔
ببین در شکلِ اول مثلثینِ (اس ط) و (اج ب)

## مشق

(۱) در مثلثِ متساوی الساقینِ (اب ج) هرگاه زاویتین قاعدۂ (ب ج) را خطوطِ (ب د) و (ج س)
تنصیف نموده با اضلاعِ مقابل در نقطۂ (د) و (س) موصول شوند)۔
ثابت کن مثلثِ (س ب ج) و (د ج ب) باهم متساوی‌اند
(۲) از اطرافِ قاعدۂ مثلثِ متساوی الساقین عمائد بر ضلعینِ مقابل خارج شوند باهم متساوی خواهند بود)۔
(۳) خطیکه تنصیف کند زاویه را فاصلۂ هر نقطۂ آن با اضلاعِ طرفین متساوی خواهد بود)۔
(۴) در خطِ (اب) از نقطۂ وسطِ (ج) خطِ مستقیمی خارج شده است
و از نقطۂ (ا) و (ب) عمائد (ا د) و (ب س) بر آن قائم میباشند
ثابت کن (ا د) مساوی (ب س) است)۔
(۵) دریك جانبِ خطِ مستقیمی از دو نقاطِ معلوم دو خطِ مستقیم چنان خارج کن که بر خطِ مستقیم معلوم باهم اتصال نموده تشکیلِ زوایای متساویه نمایند)۔

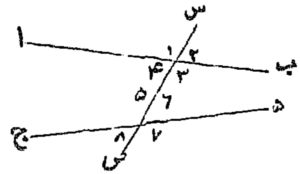



فرض کن (اب) خطِ مستقیم معلوم (ج) و (د) نقاط معلوم
مقصود اینست که از نقاطِ مذکوره دو خطِ مستقیم قسمی خارج شوند که تمائلِ آنها نسبت با (اب) مثل هم باشد)۔
وضعِ شکل = قایم کن بر (اب) عمودِ (ج س) را و خارج ساز آنرا تا نقطۂ (ص)
قسمیکه (ص س) مساوی (ج س) باشد)۔
وصل کن (د ص) را که بر نقطۂ (ط) باهم موصول شوند)۔
ایضاً وصل کن (ج ط) را)۔
پس (ج ط) و (ط د) خطوطِ مطلوبه خواهند بود)
(ثابت کن بدلیل)
(۶) دریك خطِ مستقیم معلوم نقطۂ معیّن کن که فاصلۂ آن متساوی باشد با دو خطِ متقاطع معلوم
بیان کن در چه صورتی این دعوی غیر ممکن خواهد بود)۔

(۷) از نقطهٔ معلوم خط مستقیمی خارج کن که چون از دو نقطهٔ مفروضه بران دو عمود قائم شود باهم متساوی باشند)

ظاهر کن در چه صورتی این دعوی ممکن نباشد)

حد = خطوط مستقیم متوازی آن خطوط را گویند که از دو جانب خود هر قدر ممتد شوند باهم اتصال و تقاطع ننمایند




تعریف = چون دو خط مستقیم (اب) و (ج د) را خط مستقیم دیگر مثلاً (س ص) قطع کند.

واز آن تقاطع زوایا حادث شوند هر یکی از آن زوایا را جهت امتیاز باسمی خاص موسوم سازند)

مثلاً ۱ - ۲ - ۷ - ۸ را زوایای خارجه گویند)

و ۳ - ۴ - ۵ - ۶ را زوایای داخله خوانند)

ایضاً هر یکی از ۴ - ۶ و ۳ - ۵ را زاویهٔ متبادله گویند)

واما در یک سمت (س ص) زاویهٔ (۲) را خارجه و (۶) را نسبت بآن زاویهٔ داخلهٔ مقابل گویند)

وگاهی ۲ و ۶ ونیز ۱ - ۵ و ۷ - ۳ و ۸ - ۴ را متناظر گویند

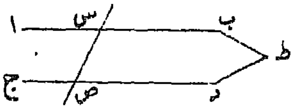
پس (بحکم علم ۱۲) هرگاه مجموعهٔ زاویتین (۳) و (۵) نسبت بدو قائمه کمتر باشد

وقطعاً

قطعاً (اب) و (ج د) بعد از امتدادِ بے ہم در یک نقطہ باہم وصل خواہند شد)۔

## شکل (۲۷) اثباتی

ہرگاہ بر دو خطِ مستقیم خطِ مستقیم دیگر واقع شود و زوایا متبادلہ را متساوی تشکیل نماید پس آن دو خطِ مستقیم باہم متوازی خواہند بود




فرض کن (اب) و (ج د) را کہ دو خطِ مستقیم اند

خطِ مستقیم (س ص) در نقطۂ (س) و (ص) قطع نمودہ زوایائے متبادلہ (ا س ص) و (س ص د) را باہم متساوی تشکیل دادہ است)۔

لہٰذا (اب) متوازی (ج د) خواہد بود)۔

ثبوت = زیراکہ ہرگاہ (اب) متوازی (ج د) نباشد لابد در یک نقطہ پس از امتدادِ بے ہم باہم وصل خواہند شد)۔

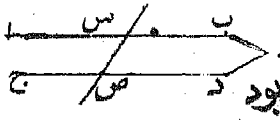
یعنی بسمتِ (ب) و (د) یا بسمتِ (ا) و (ج) اتصال پیدا کنند)۔

ہرگاہ ممکن است تصور نما کہ (اب) و (ج د) پس از امتداد متواتر بطرفِ (ب) و (د) در نقطۂ (ط) موصول شدہ اند)۔

در اینصورت (ط س ص) مثلثے میباشد)۔

پس (بحکم ش ۱۶) زاویۂ خارجہ یعنی (ا س ص) نسبت بزاویۂ داخلہ

(س ص ط)




کہ مقابل واقع شدہ است اعظم خواهد بود

ولکن (بموجب مفروض) زاویۂ (ا س ص) برابر است با زاویۂ (س ص ط)

بنابراین هر دو حالت رد ا شد واین غیر ممکن است)۔

لهٰذا ازاین ثابت شد کہ (ب ا) و (ج د) از طرفِ (ب) و (د) پس از امتداد در هیچ نقطۂ وصل نخواهند شد)

وهمین طور ثابت توان نمود کہ از طرفِ (ا) و (ج) هم بعد از امتداد در هیچ جائی وصل نخواهند شد)۔

و (بحکم حد ۳۵) خطوطِ مستقیمۂ کہ از هر دو طرف با ستقامت ممتد شوند و در هیچ جائی اتصال پیدا نکنند و تقاطع ننمایند آنرا خطوطِ متوازیہ نامند)۔

پس خط (ا ب) و (س د) با هم متوازی میباشند)۔

لهٰذا هرگاه بر دو خطِ مستقیم خطِ مستقیمِ دیگر واقع شود الخ

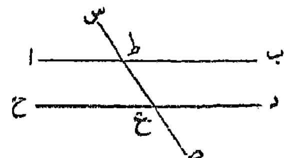
## تفهیم

(۱) عمائد ایکہ بر خط مستقیم قائم شوند با هم متوازی میباشند)۔
(۲) هرگاه زوایای شکل ذوار بعۃ الاضلاع قائمہ باشند آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود
(۳) هرگاه در ذوار بعۃ الاضلاع اضلاعِ متقابلہ متوازی باشند آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود)۔
(۴) خطوطیکہ منصّف زوایای متبادلۂ متساویہ باشند متوازی خواهند بود)۔
(۵) شکل معیّن وشبہ بالمعیّن هر دو متوازی الاضلاع میباشند)۔

## شکل (۲۸) اثباتی

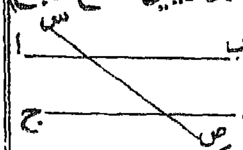
هرگاه بر خطِ مستقیم خطِ مستقیم دیگر واقع شود و در یک سمت

خود زاویهٔ خارجه را بمساوی زاویهٔ داخله که مقابل است پیدا کند یا اینکه
دریك سمت خود دو زاویهٔ داخله باهم بمساوی دو قائمه تشکیل نماید پس
دو خطِ مستقیم مذکوره باهم متوازی خواهند بود




فرض کن دو خط مستقیم (ا ب) و (ج د) را خط مستقیم (س ص) در نقطهٔ
(ط) و (ع) قطع نموده است
و در یك سمت خود زاویهٔ خارجهٔ (س ط ب) را بمساوی زاویهٔ داخلهٔ (ط ع د)
که در مقابل واقع شده پیدا کرده است )هـ
یا اینکه در یك سمت خود دو زاویهٔ داخلهٔ
یعنی (ب ط ع) و (ط ع د) باهم بمساوی دو قائمه پیدا کرده است
در هر دو صورت خط مستقیم (ا ب) متوازی (ج د) خواهد بود )هـ
ثبوت = چونکه (بموجب مفروض) زاویهٔ (س ط ب) مساویست
با زاویهٔ (ط ع د )
و (بحکم ش ١٥) زاویهٔ (س ط ب) مساویست با زاویهٔ (ا ط ع )
لهذا (بحکم علم ١) زاویهٔ (ا ط ع) مساویست با زاویهٔ (ط ع د )
و این زوایا متبادله اند )هـ
پس (بحکم ش ٢٧) (ا ب) و (ج د) باهم متوازی میباشند )هـ

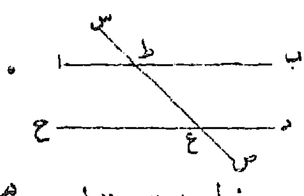
وچون (بموجب مفروض) زاویتین (ب طع) و(طع د) باهم مساوی دو قائمه اند
و (بحکم ش ۱۳) زاویتین (ا طع) و (ب طع) نیز باهم مساوی دو قائمه میباشند
پس (بحکم علم ۱) زاویتین (ب طع) و (طع د) مساوی زاویتین (ا طع) و (ب طع)
میباشند ٭




زیراکه هر صورتی بذات خود دو قائمه است
ازهر یکی ازاین متساویات ساقط کن زاویهٔ مشترکهٔ (ب طع) را
پس (بحکم علم ۳) باقی زاویهٔ (اطع) مساوی باشد با باقی زاویهٔ (طع د)
واین زوایا متبادله اند ٭
بنابراین (بحکم ش ۲۷) (اب) با (ج د) متوازی میباشند ٭
لهذا هرگاه بر دوخط مستقیم الخ

## شکل (۲۹) اثباتی

هرگاه بر دوخط مستقیم متوازی خط مستقیم دیگر واقع شود زوایا
متبادله آن باهم متساوی خواهند بود و در یک سمت آن زاویهٔ داخله
وخارجه که متناظرند باهم متساوی خواهند بود ونیز در یک سمت
دو زاویهٔ داخله باهم مساوی دو قائمه خواهند بود




فرض کن (اب) و(ج د) دوخط مستقیم متوازیند وخط مستقیم

(س ص) بآن واقع شده است)۔

لهذا شرائط ثلاثهٔ ذیل در آن یافت خواهد شد)۔

اوّل = دو زاویهٔ متبادله (ا ط ع) و (ط ع د) باهم متساوی خواهند بود)۔

دوّم = زاویهٔ خارجهٔ (س ط ب) با زاویهٔ داخلهٔ (ط ع د) که مقابل واقع شده مساوی خواهد بود)۔

سوّم = دو یک سمتِ آن دو زاویهٔ داخله (ب ط ع) و (ط ع د) باهم بمساوی دو قائمه خواهند بود)۔

ثبوت = بدلیل آنکه هرگاه زاویهٔ (ا ط ع) بمساوی (ط ع د) نباشد لابد یکی از آنها اعظم خواهد بود نسبت بدیگری)۔

درصورت امکان تصوّر نما زاویهٔ (ا ط ع) اعظمست از زاویهٔ (ط ع د)

بیفزای بوهریکی از این غیر متساویات زاویهٔ (ب ط ع) را

لهذا مجموعهٔ زاویتینِ (ا ط ع) و (ب ط ع) زیاده است

نسبت بزاویتینِ (ب ط ع) و (ط ع د)

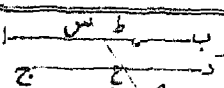
ولکن (بحکم ش ۱۳) مجموعهٔ زاویتینِ (ا ط ع) و (ب ط ع) بمساوی دو قائمه میباشد)۔

بنابراین زاویتینِ (ب ط ع) و (ط ع د) نسبت بدو قائمه کمتر خواهد بود

لهذا (بحکم علم ۱۲) هرگاه خطِ (ا ب) و (ج د) پیهم ممتد شود در یک نقطهٔ بطرفِ (ب) و (د) اتّصال خواهند نمود

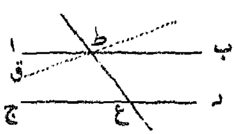
ولکن خطّینِ مذکوره پس از امتداد کاهی متّصل نخواهند شد

زیراکه (بموجب مفروض) متوازی میباشند ؛




لهٰذا زاویهٔ (اطع) با زاویهٔ (طعد) غیر مساوی نباشد ؛
یعنی باهم متساویند ؛
لکن (بحکم شر ۱۵) زاویهٔ (اطع) مساویست با زاویهٔ (سطب)
لهٰذا (بحکم علم ۱) زاویهٔ (سطب) مساویست با زاویهٔ (طعد)
بیفزای برهریکی ازاین متساویات زاویهٔ (بطع) را
پس (بحکم علم ۲) مجموعهٔ زاویتین (سطب) و(بطع)
مساویست با زاویتین (بطع) و(طعد)
ولکن (بحکم شر ۱۳) زاویتین (سطب) و (بطع) برابر دو قائمه اند
بنابراین (بحکم علم ۱) (بطع) و(طعد) بمساوی دو قائمه میباشند
لهٰذا هرگاه بر دو خط مستقیم متوازی خط مستقیم الخ

بعضی از مهندسین شکل (۲۹) را این قسم ثابت کنند
(علوم متعارفه — دو خط مستقیم متقاطع بمعیّت با خط مستقیم ثالث متوازی نشوند)



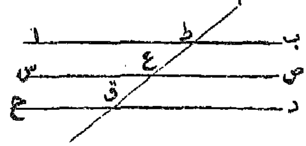

مثلاً هرگاه زاویهٔ (اطع) بمساوی (طعد) نباشد
پس باید یکی ازانها اعظم باشد نسبت به یکری ؛
تصور کن (اطع) اعظم است از زاویهٔ (طعد)
(بحکم شر ۲۳) در نقطهٔ (ط) بساز زاویهٔ (ع طق) را بمساوی زاویهٔ (طعد) که متبادله باشد
پس (بحکم شر ۲۷) (قط) و(جد) متوازیند
لکن (بموجب مفروض) اب و جد متوازیند ؛
بنابراین دو خط متقاطع (اط) و (قط) متوازی باشند با (جد)

ولکن بحکم اینکه دو خطِ مستقیم متقاطع بمعیت با خطِ مستقیم ثالث متوازی نشوند
این امر غیر ممکن است
لهذا زاویهٔ (اطع) با زاویهٔ (طع د) غیر مساوی نباشد
یعنی هر دو باهم متساویند
نتیجهٔ قسمت ثانی و ثالث شکل را توان باسلوب بحث دریافت

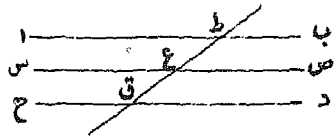
حاشیه = بدان که در علم هندسه مسئلهٔ دشوارتر از مسئلهٔ خطوطِ متوازیه نیست
مهندسین برای انحلال مشکلات آن سعیها نموده و خواسته اند که جهت تفهیم
مطلب طریقی پیدا کنند که نسبت با قلیدس اسهل باشد
ولکن در نظر اساتید دقائق بین پیداست که آن دقتها مرفوع نشده اند
برعایت اختصار در این موجز ذکر آن مطالب صرفِ نظر شد

## شکل (۳۰) اثباتی

خطوطِ مستقیمه که متوازی باشند با یک خطِ مستقیم
آن خطوط باهم متوازی خواهند بود




فرض کن از خطین (اب) و (ج د) هر یکی متوازی است با (س ص)
پس (اب) متوازی (ج د) خواهد بود
وضع شکل = چنان تصور نما که خطِ مستقیم (ط ق)
خطوطِ مستقیمه (اب) و (س ص) و (ج د) را در نقاط (ق)
و (ع) و (ط) قطع میکنند
ثبوت = چونکه دو خطِ مستقیم متوازی را یعنی (اب) و (س ص) را
خطِ (ط ق) قطع میکند
لهذا بحکم شرح (۲۹) زاویهٔ (اطع) مساوی است با زاویهٔ متبادلهٔ (طع ص)




ایضاً چونکه خطوطِ متوازیه (س ص) و (ج د) را خطِ مستقیم (ط ق) قطع میکند

لهذا (بحکم ش ۲۹) زاویهٔ (ط ع ص) مساویست بازاویهٔ (ط ق د)

واما در فوق ثابت شد که زاویهٔ (ا ط ع) مساویست بازاویهٔ (ط ع ص)

لهذا (بحکم علم ۱) زاویهٔ (ا ط ع) برابر شد بازاویهٔ (ط ق د)

واین زوایا متبادله میباشند)

بنابراین (بحکم ش ۲۷) اب متوازی (ج د) میباشد

لهذا خطوطِ مستقیمه که متوازی باشند الخ

مشق

(۱) هرگاه خطِ مستقیمی بر خطوطِ متوازیه واقع شود و بر یکی از این خطوط عمود باشد بر باقی خطوطِ متوازیه نیز عمود خواهد بود

(۲) هرگاه ضلعین یک زاویه موافق نظیر خود باضلعین زاویهٔ دیگر متوازی باشند پس آن زوایا باهم متساوی خواهند بود

(۳) شکل (۲۸) را باستعانت شکل (۲۷) ثابت کن

(۴) حصص عائد یکه میانِ خطوطِ متوازیه واقع شوند باهم متساوی میباشند

(۵) هرگاه (ا ج د) و (ب ج د) دو زاویهٔ متصله باشند و خطی هم متوازی (ا ب) واقع باشد پس خطوطیکه تنصیف این زوایا میکنند بر فاصله متساوی از خطِ (ج د) باآن خطِ متوازی وصل خواهند شد

(۶) هرگاه میان دو خطِ متوازی خطِ مستقیمی واقع شود و از نقطهٔ (د) که وسطِ آن خط است خطی قاطع خارج شود پس مقدار خطِ قاطع که مابین خطوطِ متوازیه واقع شده است در نقطهٔ (د) تنصیف خواهد شد

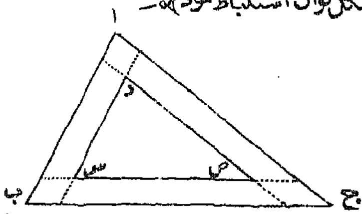
(۷) از دو خطِ متوازی نقطه بر فاصلهٔ متساوی واقع شده است

پس خطوطِ مستقیمهٔ کهٔ از دو یٔ آن نقطه بکذرند مابین آنها حصص متوازیات باهم متساوی خواهند بود

(۸) در مثلث متساوی الاضلاع چون دو خطِ متوازی با دو ضلعِ آن از نقطهٔ وسطِ ضلعِ سوّم یا از هر نقطهٔ از ضلعِ سوّم خارج شوند از خروجِ آن متوازی الاضلاعیکه مرتسم کردد مجموعهٔ اضلاعِ آن دو چند یك ضلعِ مثلث خواهد بود

(۹) سطحِ هر مثلثِ متساوی الاضلاع را کنجایشِ چهار مثلثِ متساوی الاضلاع میباشد که هر ساقی از این مثلثات بمساوی نصفِ ساقِ مثلثِ محیط خواهد بود

**تفهیم** = از مشقِ دوم این معنی هم مستفاد میشود که ممکن است سه زاویهٔ مثلثی علی التناظر متساوی باشند با سه زاویهٔ مثلثِ دیکر و سطوحِ آنها باهم متساوی نباشد چنانچه از این شکل توان استنباط نمود




مثلاً در مثلثینِ (ا ب ج) و (د س ص) ضلعینِ (ا ب) و (ا ج) با ضلعینِ (د س) و (د ص) متوازیند

و نیز ضلعِ (ب ج) با (س ص) متوازی میباشد

یعنی سه ضلعِ یك مثلث با سه ضلعِ مثلثِ دیکر علی التناظر متوازیند و نیز سه زاویهٔ یك مثلث با سه زاویهٔ مثلثِ دیکر موافقِ نظیرِ خود متساوی میباشند ولکن سطوحِ آنها باهم متساوی نباشند

بیین مشقِ سوّم از (ش ۸) و بحکمِ (ش ۱۵) ثابت کن دعوی را

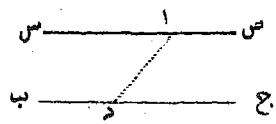
## شکل (۳۱) عملی

### از نقطهٔ مفروضهٔ خارج کن خطِ مستقیمیکه متوازی باشد باخطِ مستقیمِ مفروض




فرض کن (ا) نقطهٔ مفروضه و (ب ج) خطِ مستقیمِ مفروض

مراد اینست که از نقطهٔ (ا) خطِ مستقیمی خارج شود که متوازی باشد باخطِ




مستقیم (ب ج)

وضع شکل = در (ب ج) معیّن کن نقطهٔ مثلاً (د)

وصل کن (ا د) را

و بحکم ش (۲۳) در خطِ مستقیم (ا د) و سمتِ مقابلِ آن رسم کن زاویهٔ (د ا س) را

که مساوی باشد با زاویهٔ (ا د ج)

خارج کن خطِ مستقیم (س) را تا نقطهٔ (ص)

لهذا (س ص) با (ب ج) متوازی خواهد بود۔

ثبوت = زیرا که خطِ مستقیم (ا د) بر دو خطِ مستقیم (ب ج) و (س ص) واقع شده است

و زوایای متبادلهٔ (س ا د) و (ا د ج) را متساوی احداث نموده

بنابراین (بحکم ش ۲۷) خطِ (س ص) با (ب ج) متوازی میباشد۔

لهذا از نقطهٔ مفروضهٔ (ا) خطِ مستقیم (س ا ص) متوازی با خطِ مستقیمِ مفروضِ (ب ج) مرتسم گردید و مراد همین بوده

مشق

(۱) خطیکه متوازی قاعدهٔ مثلثِ متساوی الساقین خارج شود با اضلاعِ خود زوایای متساویه پیدا خواهد نمود۔

(۲) خطیکه منصّف زاویه باشد از هر نقطهٔ آن چون خطی متوازی با یکی از ضلعین آن کشیده شود و از آن مثلثی متشکل گردد آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود ۔

(۳) از یک نقطهٔ خط مستقیمی چنان خارج کن که با یک خط مستقیم معلوم زاویهٔ مساوی زاویهٔ معلومه پیدا کند ۔

(۴) در مثلث متساوی الساقین (ا ب ج) از یک نقطهٔ (د) خط مستقیمیکه با (ب ج) قائمه پیدا میکند خارج شده است
و (ا ب) را در نقطهٔ (س) و (ا ج) ممدوده را در نقطهٔ (ص) قطع میکند
ثابت کن که مثلث (ا س ص) متساوی الساقین است ۔

(۵) خطیکه تنصیف کند زاویهٔ خارجهٔ مثلث را هرگاه با ضلع مقابل متوازی واقع شود آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود ۔

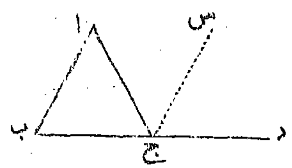
(۶) خط مستقیم معلوم را تثلیث کن ۔
بر (ا ب) بساز مثلث متساوی الاضلاع را
زاویهٔ (ا) و (ب) را بخطوط (ا د) و (ب د) تنصیف کن که بر (د) موصول شوند
از نقطهٔ (د) خارج کن خطوط (د س) و (د ص) را
قسمیکه متوازی باشند با (ا ج) و (ب ج)
پس (س) و (ص) نقاط تثلیث (ا ب) خواهند بود ۔

(۷) پیدا کن نقطهٔ وسط مثلث متساوی الاضلاع را ۔

## شکل (۳۲) اثباتی

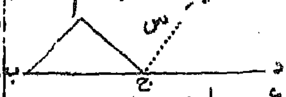
هرگاه ضلع مثلثی ممتد شود زاویهٔ خارجه که از آن تشکیل یابد مساوی دو زاویهٔ داخله که در مقابل آن واقع شده اند میباشد و مجموعهٔ زوایای مثلث مساوی دو قائمه میباشند ۔

(این قاعدهٔ کلیه را بذهن خود بسپار)




فرض کن (ا ب ج) مثلث و ضلع (ب ج) تا نقطهٔ (د) خارج شده است ۔

لهذا زاویهٔ خارجهٔ (اج د) مساوی خواهد بود با زاویتین مقابل که داخله اند




یعنی زاویهٔ (ج اب) و (اب ج) ٭

و هر سه زاویهٔ داخله مثلث بمساوی دو قائمه میباشند ٭

یعنی زاویهٔ (اب ج) و (ب ج ا) و (ج اب) برابر دو قائمه اند ٭

وضع شکل = بحکم ش (۳۱) از نقطهٔ (ج) خارج کن خطِ (ج س) را
که متوازی باشد با خطِ (ب ا)

ثبوت = چون (ا ب) متوازی (ج س) است و (اج) بران واقع میشود
لهذا (بحکم ش ۲۹) دو زاویهٔ متبادلهٔ (اج س) و (ب اج) باهم متساوی اند
ایضاً چونکه (اب) متوازی (ج س) است و خطِ (ب د) بران واقع شد
لهذا (بحکم ش ۲۹) زاویهٔ خارجهٔ (س ج د) مساویست با زاویهٔ
داخلهٔ (اب ج) که مقابل واقع شده است ٭
و در فوق ثابت شد که زاویتین (اج س) و (ب اج) باهم متساویند
لهذا (بحکم علم ۲) تمام زاویهٔ خارجهٔ (اج د) بمساوی دو زاویهٔ داخلهٔ
(ج اب) و (اب ج) که در مقابل واقع شده اند میباشد ٭
بر هر یکی ازین متساویات بیفزای زاویهٔ (اج ب) را
پس مجموعهٔ زاویتین (اج د) و (اج ب) بمساوی سه زاویه
یعنی (ج اب) و (ب اج) و (اج ب) میباشد ٭
لکن (بحکم ش ۱۳) زاویتین (اج د) و (اج ب) بمساوی دو قائمه میباشند
پس (بحکم علم ۱) مجموعهٔ زوایای ثلاثه

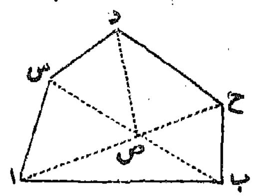
یعنی

یعنی (ج ب ا) و (ب ا ج) و (ا ج ب) بمساوی دو قائمه میباشند) —

لهذا هرگاه ضلع مثلثی ممتد شود الخ

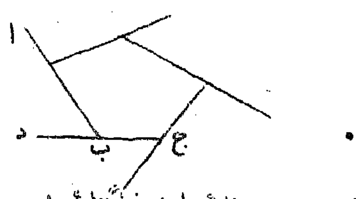
## نتایج

(۱) مجموعهٔ زوایای داخلهٔ هر شکل مستقیمة الاضلاع مع چهار قائمه که بر آن افزوده شود مساویست با قوائمی که عدد آن دو چند اعدادِ اضلاع آن شکل باشد



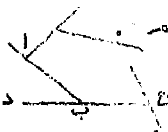

مثلاً هرگاه در شکل مستقیمة الاضلاع (ا ب ح د س) نقطهٔ فرضاً (ص) معیّن نموده گوشه های شکل را بخطوط مستقیمه وصل دهیم
پس شکل مذکوره منقسم خواهد شد در مثلثاتیکه عدد آن بقدر اضلاع شکل باشد
وچون (بحکم ش ۳۲) مجموعهٔ زوایای داخله هر مثلث بمساوی دو قائمه میباشد
ونیز چونکه مثلثات شکل مذکوره بقدر اضلاع آنست
لهذا مجموعهٔ کل زوایای داخلهٔ مثلثات بقدر آن قوائم است
که عدد آنها دو چند اعدادِ اضلاع آن شکل باشد) —
لکن این زوایا که مذکور شد مساینند با زوایای داخلهٔ شکل مع آن زوایا که در نقطهٔ (ص) متشکل شده اند
واما بحکم (ش ۱۵) بر نقطهٔ (ص) که راس مشترک همه مثلثات است
مجموعهٔ کل زوایا بمساوی چهار قائمه میباشد) —
لهذا مجموعهٔ زوایای داخله هر شکل الخ

(۲) مجموعهٔ زوایای خارجهٔ هر شکل مستقیمة الاضلاع بمساوی چهار قائمه میباشد) —




چونکه (بحکم ش ۱۳) هر زاویهٔ داخله مثلاً زاویهٔ (ا ب ج) مع زاویهٔ خارجهٔ (ا ب د) که متصل است برابر با دو قائمه
لهذا مجموعهٔ تمامِ زوایای داخله و تمام زوایای خارجه بمساوی آن قوائم است

کہ عدد انها مضاعف عدد شکل مستقیم الاضلاع باشد ))۔
واما موجب نتیجهٔ اول مجموعهٔ زوایای داخله مع چهار قائمه برابر است با ان قوائم که عدد انها
دو چند اعداد اضلاع ان شکل باشد
پس (بحکم علم ۱) مجموعهٔ تمام زوایای داخله وخارجه بمساوی مجموعهٔ کل زوایای داخله
مع چهار قائمه میباشد
از هر یکی ازاین متساویات ساقط کن زوایای داخله را
پس مجموعهٔ زوایای خارجه بمساوی چهار قائمه میباشد ))۔
لهذا مجموعهٔ زوایای خارجه هر شکل الخ




تفهیم = این نتائج مفیده را بذهن خود بسپار =

(۱) هرگاه یك زاویهٔ مثلثی مساوی باشد با مجموعهٔ دو زاویهٔ دیگر
پس ان زاویه قائمه خواهد بود ))۔

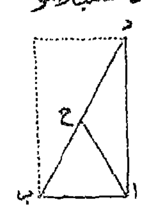
(۲) هر زاویهٔ مثلث متساوی الاضلاع بمساوی دو ثلث ($\frac{2}{3}$) یك قائمه میباشد ))
یا اینکه بمساوی یك ثلث ($\frac{1}{3}$) دو قائمه میباشد ))۔

(۳) هرگاه در مثلث متساوی الساقین یك زاویه قائمه باشد
پس هر یکی از باقی زاویتین نصف قائمه خواهد بود ))۔

(۴) مجموعهٔ دو زاویهٔ یك مثلث =
(اول) هرگاه برابر یك قائمه باشد پس زاویهٔ سوم قائمه خواهد بود
واین مثلث را مثلث قائم الزاویه گویند ))۔
(دوم) هرگاه کمتر از یك قائمه باشد پس زاویهٔ سوم منفرجه خواهد بود
واین مثلث را مثلث منفرج الزاویه گویند ))۔
(سوم) هرگاه زیاده از یك قائمه باشد پس زاویهٔ سوم حادّه خواهد بود ))
واین مثلث را مثلث حادة الزوایا نامند ))۔

(۵) در مثلثی که دو زاویه معلوم باشد پس زاویهٔ سوم هم معلوم خواهد بود ))۔

نتائج فوق را ازاین شکل توان استنباط نمود




بساز بر خط (اب) مثلث متساوی الاضلاع (ابج) را
خارج کن (بج) را تا نقطهٔ (د) قسمیکه (ج د) برابر باشد (بج) را
وصل کن (اد) را ))۔
دراین صورت زاویهٔ (داب) قائمه خواهد بود
زیرا که (بحکم شرح ۵) زاویهٔ (ج اد) مساوی است با زاویهٔ (ج د ا)

دو زاویه

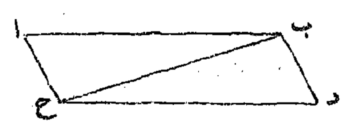
وزاویهٔ (ج اب) مساویست بازاویهٔ (ج ب ا)
لهذا (بحکم علم ٢) زاویهٔ (ب ا د) قائمه میباشد
پس (بحکم ش ٣٢) مجموعهٔ دو زاویهٔ دیگر
یعنی (اب د) و (ا د ب) برابر یك قائمه میباشد
باقی نتائج را خود ثابت کن

## مشق

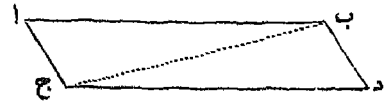
(١) در مثلث حادّ الزوایا مجموعهٔ دو زاویه بیشتر است نسبت بزاویهٔ سوّم ۝
(٢) هرگاه در مثلث (اب ج) ضلع (ب ج) تا نقطهٔ (د) خارج شود وخط (اس) زاویهٔ (ب اج) را تنصیف نموده با (ب ج) در نقطهٔ (س) وصل شود
ثابت کن که مجموعهٔ زاویتین (اب د) و (اج د) دوچند است نسبت بزاویهٔ (اس د)
(٣) هرگاه دو زاویهٔ قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین را دو خط مستقیم تنصیف نموده باهم وصل شوند
پس زاویهٔ که ازاین دو خط متشکل گردد
مساویست بازاویهٔ خارجه که برقاعدهٔ آن شکل متشکل شود ۝
(٤) مجموعهٔ تمام زوایای خارجهٔ هر شکل ذوار بعة الاضلاع بمساوی چهار قائمه میباشد ثابت کن ۝
(٥) ثابت کن مجموعهٔ تمام زوایای داخلهٔ شکل مسدّس بمساوی هشت قائمه میباشد ۝
(٦) هر زاویهٔ شکل مخمّس متساوی الزوایا بقدر ($1\frac{1}{5}$) یك قائمه مع یك خمس قائمه میباشد ثابت کن ۝
(٧) بما چند اضلاع خواهد بود آن شکل مستقیمة الاضلاع را که مجموعهٔ زوایای داخلهٔ آن دوچند باشد نسبت بزوایای خارجهٔ آن ۝

## شکل (٣٣) اثباتی

هرگاه در یك سمت هر طرفی از اطراف دو خط مستقیم متوازی و متساوی را دو خط مستقیم دیگر وصل دهند پس این دو خط واصل هم متوازی و متساوی خواهند بود




فرض کن (اب) و (ج د) دو خط مستقیم متوازی و متساوی اند ۝
وصل کن نقاط اطراف آنهارا بدو خط مستقیم (اج) و (ب د) ۝
پس خطین (اج) و (ب د) باهم متوازی و متساوی خواهند بود ۝




وضع شکل = وصل کن وتر (ب ج) را ٭

ثبوت = چونکه (بموجب مفروض) (ا ب) متوازی (ج د) است
وخطِ (ب ج) بر آن واقع میشود
لهذا (بحکم ش ۲۹) زاویهٔ متبادلهٔ (ا ب ج) و (ب ج د) باهم متساوی میباشند
ایضاً چونکه (بموجب مفروض) (ا ب) مساوی (ج د) است
وخطِ (ب ج) نسبت بمثلثینِ (ا ب ج) و (ب د ج) مشترک است
لهذا ضلعینِ (ا ب) و (ب ج) بمساوی ضلعینِ (د ج) و (ج ب) میباشند
هریکی موافق نظیر خود
وزاویهٔ (ا ب ج) بمساوی (ب ج د) که متبادله اند ثابت ومذکور شد ٭
لهذا (بحکم ش ۴) قاعدهٔ (ا ج) بمساوی قاعدهٔ (ب د) ومثلثِ (ا ب ج) بمساوی مثلثِ (ب ج د) میباشد ٭
ونیز زوایائیکه مقابل اضلاع متساویه واقعند بانظائر خود متساوی میباشند ٭
لهذا زاویهٔ (ا ج ب) بمساوی زاویهٔ (ج ب د) میباشد ٭
ایضاً چونکه خطِ مستقیم (ب ج) بر دو خطِ مستقیم (ا ج) و (ب د) واقع میشود
و زوایای متبادلهٔ (ا ج ب) و (ج ب د) را متساوی تشکیل میدهد

یعنی مربّع، مستطیل، معین، شبه معین )۔
وهرگاه اضلاع متقابلهٔ آن متوازی نباشند
آن اشکال از اقسام منحرف میباشند
یعنی توان گفت یکی از اشکال منحرف را ذوار بعة الاضلاع
ولکن نتوان گفت متوازی الاضلاع ( ببین حد ۳۴ ) )۔

(۲) در متوازی الاضلاع =
(اوّل) هرگاه یک زاویه قائمه باشد باقی زوایا نیز قائمه خواهند بود )۔
(دوّم) هرگاه دو ضلع متصل متساوی و زاویه قائمه باشد ـ آن شکل مربع خواهد بود
(سوم) هرگاه دو ضلع متصل متساوی باشند ـ آن شکل معین یا مربع خواهد بود
(چهارم) هرگاه دو ضلع متصل متساوی باشند ـ اوتار آن بر توائم تقاطع خواهند بود
(پنجم) هرگاه اقطار بریکدیگر عمود باشند ـ آن شکل مربع یا معین خواهد بود )۔
(وتر را گاهی قطر خوانند)
(ششم) هرگاه اقطار تنصیف زوایای موصولهٔ خود نمایند ـ آن شکل معین یا مربع
خواهد بود )۔
(هفتم) هرگاه اقطار متساوی باشند ـ تمام زوایای آن قائمه خواهند بود )۔

(۳) در ذوار بعة الاضلاع =
(اوّل) هرگاه اضلاع متقابله متساوی باشند ـ آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود
(دوم) هرگاه زوایای متقابله متساوی باشند ـ آن شکل متوازی الاضلاع
خواهد بود )۔
(سوم) هرگاه اوتار تنصیف یکدیگر نمایند ـ آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود
(چهارم) هرگاه دو وتر تنصیف شکل نمایند ـ این شکل متوازی الاضلاع خواهد بود

(۴) اشکال چهارگوشهٔ که قائمة الزاویه نباشند ـ اوتار آن متساوی نخواهند بود )۔

## مشق =

(۱) ا ب ج د متوازی الاضلاعی است
س و ص نقاط وسط در (ا د) و (ب ج)
ثابت کن که (ا ص ج س) متوازی الاضلاع میباشد )۔

(۲) هرگاه دو متوازی الاضلاع ضلعین متصلهٔ یکی با ضلعین متصلهٔ دیگر متساوی باشند
و زوایای متشکلهٔ این زوجین هم متساوی باشند
ثابت کن هر دو متوازی الاضلاع از هر حیثیت باهم متساوی خواهند بود )۔

(۳) هرگاه در دو مستطیل ضلعین متصلهٔ یکی با ضلعین متصلهٔ دیگر متساوی باشند
ثابت کن هر دو مستطیل باهم متساوی خواهند بود )۔

# فصل سوّم

## سطوح متوازی الاضلاع و مثلثات

توضیح = در دو فصل پیش که ذکر مساوات اشکال شده است

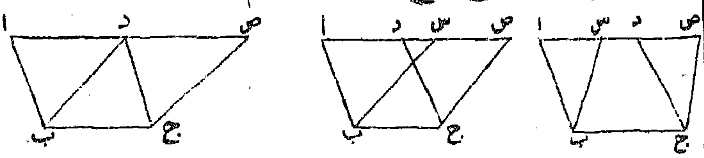
از هر حیثیّت باهم برابر یعنی متساوی الاجزاء بوده اند
ومحکوم بعمل انطباق (ببین تفهیم فقرهٔ هشتم از علوم متعارفه)
ولکن بعد از این یعنی در فصل سوم ذکر مساوات متوازی الاضلاع
ومثلثات بلحاظ سطوح خواهد بود
لازم نیست بریکدیگر منطبق شوند
یعنی این اشکال چنین متشابه نباشند که بغیر از تبدیل نمودن شکل عمل انطباق واقع شود)
لهذا در این فصل عمل انطباق معمول نباشد

## (حدود)

(۱) ارتفاع متوازی الاضلاع آن فاصلهٔ عمودیست که مابین قاعده وضلع مقابل واقع شود
(۲) ارتفاع مثلث آن فاصلهٔ عمودیست
که مابین راس وقاعدهٔ آن واقع شود

## شکل (۳۵) اثباتی

اشکال متوازی الاضلاع که بریک قاعده ودرمیان دو
خط متوازی واقع شوند باهم متساوی میباشند




فرض کن (ا ب ج د) و (س ب ج ص) اشکال متوازی الاضلاع میباشند
وبریک قاعدهٔ (ب ج) مابین متوازیین (ا ص) و (ب ج) واقع
پس متوازی الاضلاع (ا ب ج د) بمساوی متوازی الاضلاع (س ب ج ص)
خواهد بود

صورت اوّل = هرگاه در هر دو متوازی الاضلاع معلومه
ضلعینیکه مقابل قاعدهٔ (ب ج) واقع شده اند
دریک نقطهٔ (د) منتهی شوند

درانیصورت (بحکم شر ۳۴) ظاهراست که هر متوازی الاضلاع مضاعف
مثلث (دبج) خواهد بود ۵
لهذا (بحکم علم ۶) باهم متساوی میباشند ۵
صورت دوّم = هرگاه دو هر دو متوازی الاضلاع مذکوره
ضلعین (اد) و (سص) دریک نقطهٔ (د) منتهی نباشند
پس چونکه (ابجد) متوازی الاضلاع میباشد
لهذا (بحکم شر ۳۴) ضلعین (اد) و (بج) باهم متساویند ۵
وهمین دلیل ضلع (سص) مساوی است باضلع (بج)
لهذا (بحکم علم ۱) (اد) بمساوی (سص) میباشد ۵
ایضًا (بحکم علم ۲-۳) کلّ (اس) یااینکه بقیّه ان مساویت با
کلّ یااینکه بابقیّه (دص)
و (بحکم شر ۳۴) (اب) بمساوی (دج) میباشد
لهذا ضلعین (سا) و (اب) مساویند باضلعین (صد) و (دج) هر
جزوی بانظیر خود موافق ۵
و (بحکم شر ۲۹) زاویهٔ خارجهٔ (صدج) برابراست بازاویهٔ داخلهٔ
(ساب) که مقابل واقع شده است ۵
لهذا (بحکم شر ۴) مثلث (صدج) مساویت بامثلث
(ساب) ۵
از شکل منحرفهٔ (ابجص) ساقط کن مثلث (صجد) را

ایضاً از شکلِ مذکوره ساقط کن مثلثِ (س اب) را

(هر دفعه بعد از اسقاطِ متساویات ملاحظه کن چه باقی می ماند)

لهذا (بحکمِ علم ۳) بعد از اسقاطِ مثلث در هر مرتبه

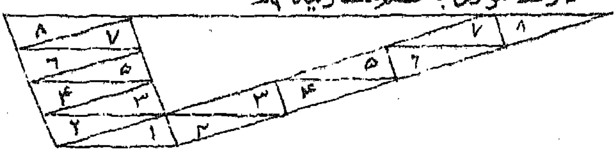
باقیات باهم متساوی میباشند)

یعنی متوازی الاضلاع (ا ب ج د)

بمساوی متوازی الاضلاع (س ب ج ص) میباشد).....

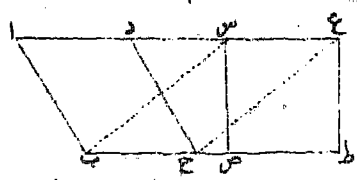
لهذا اشکالِ متوازی الاضلاع که بر یک قاعده الخ

توضیح = هرگاه از یک زاویهٔ متوازی الاضلاع تا نقطهٔ وسطِ ضلعِ مقابل خطی خارج شود
واز خروج آن مثلثی که متشکل میگردد
آن مثلث بمساوی ربع متوازی الاضلاع خواهد بود
چنانچه از این شکل تشفی خاطر مبتدی خواهد شد).
و نیز معلوم شود که دو متوازی الاضلاع بر یک قاعده و مابین
دو خط متوازی باهم متساویند).




## شکل (۳۶) اثباتی

اشکالِ متوازی الاضلاع که بر قواعدِ متساویه و مابینِ دو خطِ
متوازی واقع باشند باهم متساوی خواهند بود




فرض کن (ا ب ج د) و (س و ص ط ع) اشکالِ متوازی الاضلاع

و بر قواعد متساویۂ (ب ج) و (ص ط) ما بینِ متوازیینِ (ا ع) و (ب ط) واقع میباشند)۔

پس متوازی الاضلاع (ا ب ج د) بمساوی (س ص ط ع) خواهد بود)۔

وضع شکل = وصل کن (ب س) و (ج ع) را

ثبوت = چونکه (بموجب مفروض) (ب ج) بمساوی (ص ط) میباشد

و (بحکم ش ۳۴) (ص ط) بمساوی (س ع)

لهذا (بحکم علم ۱) (ب ج) مساویست با (س ع)

و (بموجب مفروض) خطوط مذکوره نیز متوازی میباشند)۔

و هر طرفی از اطرافِ آنها بخطوط مستقیمۂ (ب س) و (ج ع) موصول شده است

و (بحکم ش ۳۳) خطوطِ مستقیمه که واصل هر طرفی از طرفین خطوطِ مستقیمۂ متوازیه و متساویه باشند

آن خطوط نیز باهم متساوی و متوازی خواهند بود)۔

لهذا خطیّنِ (ب س) و (ج ع) باهم متساوی و متوازی میباشند)

پس (بحکم حدود) (س ب ج ع) شکل چهارگوشه یعنی متوازی الاضلاع میباشد)۔

لهذا (بحکم ش ۳۵) مساویست با متوازی الاضلاع (ا ب ج د)

زیرا که بر یک قاعدۂ (ب ج) و ما بینِ متوازیینِ (ب ط) و (ا ع) واقع شده اند)۔

ونیز بهمین دلیل متوازی الاضلاع (س ص ط ع)

مساویست با متوازی الاضلاع (س ب ج ع)

پس (بحکم علم ۱) متوازی الاضلاع (ا ب ج د)

مساویست با متوازی الاضلاع (س ص ط ع)

لهذا اشکال متوازی الاضلاع که بر قواعد متساویه الخ

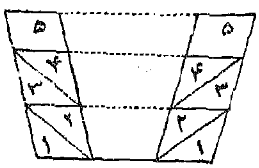
تفهیم — در دو مبحث اخیر یعنی (۳۵) و (۳۶) منتج میشود =

(۱) سطح متوازی الاضلاع مساویست با آن مستطیل یا قائم الزاویه که ارتفاع و قاعده آن برابر باشد با ارتفاع و قاعده متوازی الاضلاع مذکور ٭

(۲) سطوح اشکال متوازی الاضلاع که ارتفاع و قواعد آنها باهم برابر باشد باهم متساوی خواهند بود

(۳) در دو سطح متوازی الاضلاع که ارتفاع آن باهم متساوی باشد اعظم است انکه قاعده اش اطول است ٭

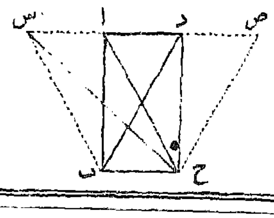
(۴) در دو سطح متوازی الاضلاع که قواعد آن باهم متساوی باشند اعظم است انکه ارفع باشد ٭




(۵) ازاین شکل ظاهر شود ٭ اشکال متوازی الاضلاع که بر قواعد متساویه و مابین متوازیین باشند باهم متساوییند ٭

## شکل (۳۷) اثباتی

مثلثات که بر یک قاعده و مابین متوازیین واقع شوند باهم متساوی خواهند بود



فرض کن (ا ب ج) و (د ب ج) دو مثلّث و بریک قاعدۂ (ب ج)

و مابینِ متوازیینِ (ا د) و (ب ج) واقع شده اند )۔

پس مثلّثِ (ا ب ج) بمساوئ مثلّثِ (د ب ج) خواهد بود )۔

وضع شکل (بحکم اصول ۲) خارج کن خطِ ممدودۂ (ا د) را از

هر دو طرف

تا نقطۂ (س) و (ص )

و (بحکم ش ۳۱) از نقطۂ (ب) خارج کن خطِ (ب س) را

که متوازی باشد با خطِ (ا ج )

و از نقطۂ (ج) خارج کن خطِ (ج ص) را

که متوازی باشد با خطِ (ب د )

ثبوت = پس (بحکم حدود) هر یکی از دو شکل

یعنی (س ب ج ا) و (د ب ج ص) متوازی الاضلاع میباشند )

و (بحکم ش ۳۵) (س ب ج ا) بمساوئ (د ب ج ص) میباشند )

زیرا که بریک قاعدۂ (ب ج) و مابینِ متوازیینِ (ب ج) و (س ص)

واقعند )۔

و مثلّثِ (ا ب ج) نصفِ متوازی الاضلاع (س ب ج ا) میباشد

لهذا (بحکم ش ۳۴) (ا ب) منصّفِ متوازی الاضلاع میباشد

یعنی تنصیف میکند (س ب ج ا) را )۔

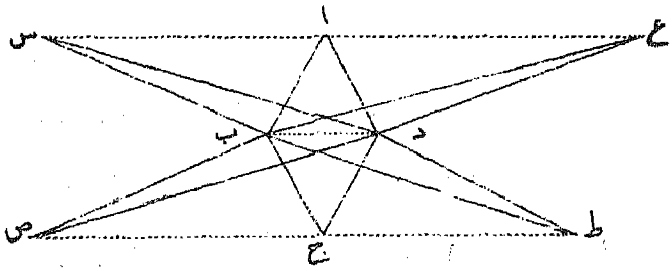
و مثلّثِ (د ب ج) نصفِ متوازی الاضلاع (د ب ج ص) میباشد

لهذا (بحکم ش ۳٤) (دج) تنصیف میکند متوازی الاضلاع (د ب ج ص) را ) ۰۔

لهذا (بحکم علم ۷) اشیائیکه نسبت بچیزی نصف باشند آن اشیاء باهم متساویند ) ۰۔

پس مثلثِ (ا ب ج) بمساوی مثلثِ (د ب ج) میباشد ) ۰۔

لهذا مثلثات کہ بریک قاعدہ الخ




سؤال = (۱) درچه صورتی توان ثابت نمود که مجموعهٔ مثلثات اربعه یعنی (س ب د) و (ص ب د) و (ط د ب) و (ع د ب) دوچند است نسبت بمتوازی الاضلاع (ا ب ج د)

جواب = درصورتیکه (س ع) و (ص ط) متوازی باشد با (ب د)

سؤال = (۲) درچه صورتی توان ثابت نمود که یکی از مثلثاتِ اربعه مثلاً (ع ب د) مساویست با مثلث ا ب د ) ۰۔

جواب = درصورتیکه (ب د) متوازی (س ع) یا (ا ع) باشد ) ۰۔

مشق =

(۱) درشکل (۳۷) (ا ج) و (ب د) درنقطهٔ (ط) تقاطع نموده اند ثابت کن =
(اول) مثلثین (ا ب ط) و (د ط ج) باهم متساویند
(دوم) اشکال ذوار بعة الاضلاع (س ب ط ا) و (ص ج ط د) باهم متساویند ) ۰۔

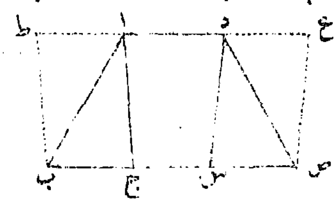
(۲) درشکل (١٦) ثابت کن مثلثین (ا ب ج) و (ص ب ج) باهم متساویند ) ۰۔

(۳) بر قاعدهٔ مثلثِ معلوم بساز مثلثِ متساوی الساقینی را قسمی

کر سطح آن مساوی باشد با مثلث معلومه)
(۴) هرگاه نقاط وسط دو ساق مثلث متساوی الساقین را وصل کنیم
و از آن نقاط عمائد بر قاعده قائم سازیم
متوازی الاضلاعی که ازین عمل مرتسم گردد
ثابت کن بمساوی نصف متساوی الساقین معلوم خواهد بود)

## شکل (۳۸) اثباتی

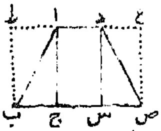
مثلثاتی بر قواعد متساویه و مابین دو خط متوازی واقع باشند
باهم متساوی خواهند بود




فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلث
و بر قواعد متساویه (ب ج) و (س ص) مابین متوازیین (ب ص) و (ا د) واقع شده اند
پس مثلث (ا ب ج) بمساوی مثلث (د س ص) خواهد بود)
وضع شکل = خط ممدوده (ا د) را خارج کن از هر دو طرف
تا بنقطه (ع) و (ط)
و (بحکم ش ۳۱) از نقطه (ب) خارج کن خط (ب ط) را
که متوازی باشد با خط (ا ج)
و از نقطه (ص) خارج کن خط (ص ع) را
که متوازی باشد با خط (س د)
ثبوت = لهذا (بحکم حدود) هر یکی از سطحین (ط ب ج ا) و

(دس ص ع) متوازی الاضلاع میباشند)

وکذلک (بحکم ش ۳۷) باهم متساوی میباشند




زیراکه بر دو قاعدهٔ مُتساویهٔ (ب ج) و (س ص)

ومابینِ متوازیینِ (ب ص) و (ط ع) واقع شده اند)

وچونکه قطرِ (ا ب) تنصیف میکند متوازی الاضلاع (ط ب ج ا) را

لهذا (بحکم ش ۳۴) مثلّثِ (ا ب ج) بقدرِ نصفِ متوازی الاضلاع

معلوم میباشد)

ایضاً چونکه قطرِ (د ص) تنصیف میکند متوازی الاضلاع (د س ص ع) را

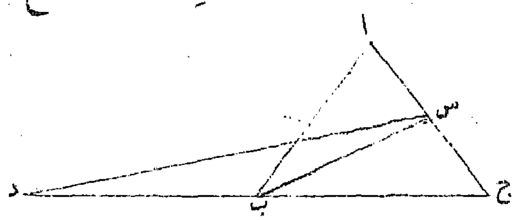
لهذا مُثلّثِ (د س ص) بقدرِ نصفِ متوازی الأضلاع میباشد

وچونکه (بحکم علم ۷) اشیائیکه نسبت بچیزی نصف باشند

آن اشیا باهم مُتساویند)

پس مُثلّثِ (ا ب ج) مساویّ مُثلّثِ (د س ص) میباشد)

لهذا مُثلّثات که بر قواعدِ متساویه الخ




سؤال = درچه صورتی توان ثابت نمود که مثلّثینِ (ا ب ج) و (د ج س) باهم متساویند)
جواب = درصورتیکه (ب س) تنصیف نماید ضلعینِ (ا ج) و (د ج) را)

مشق

(۱) هر مثلّثی تقسیم شود از خطِ متوسّطِ خود در دو قسمت متساوی)

ومراد از خط متوسط خطی است که از یک زاویهٔ مثلث تا نقطهٔ وسط ضلع مقابل اخراج شود

(۲) هر متوازی الاضلاع را اقطار تقسیم میکنند در چهار مثلث
که سطوح آنها باهم متساوی باشند ».

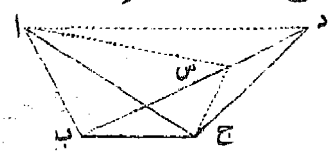
(۳) (ا ب ج) مثلثی است وقاعدهٔ (ب ج) در نقطهٔ (د) تنصیف میشود ».
پس هرگاه در متوسط (ا د) نقطهٔ مثلاً (س) واقع شود
ثابت کن که مثلث (ا ب س) مساوی است با مثلث (ا ج س) ».

(۴) (ا ب ج د) متوازی الاضلاع است
و در وتر (ا ج) نقطهٔ مثلاً (س) معین شده است
و (س ب) و (س د) موصول شده اند
ثابت کن مثلث (ب ا س) مساویست با مثلث (د ا س) ».

(۵) هرگاه در دو مثلث ضلعین هر یکی علی التناظر باهم متوافق باشند
و زوایای متشکلهٔ این اضلاع مکمل یکدیگر باشند
پس سطوح هر دو مثلث باهم متساوی خواهند بود ».
مکمل یکدیگر یعنی مجموعهٔ هر دو یک قائمه باشد ».

## شکل (۳۹) اثباتی

مثلثات متساویه که بر یک قاعده و در یک سمت آن
باشند واقع میشوند مابین دو خط متوازی

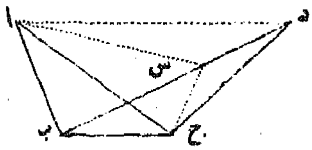


فرض کن (ا ب ج) و (د ب ج) دو مثلث متفقه در یک سمت
بر قاعدهٔ (ب ج) واقع شده اند ».

پس هر دو مثلث مابین متوازیین واقع خواهند شد ».

یعنی هرگاه (ا د) موصول شود پس (ا د) متوازی (ب ج) خواهد بود
بدلیل اینکه هرگاه چنین نباشد

(۱) وضع شکل = پس بحکم ش (۳۱) بشرط امکان خارج کن از نقطهٔ




خط اس را کہ متوازی باشد با ب ج )

وصل کن س ج را

ثبوت = لهذا (بحکم ش ۳۷) مثلث ا ب ج مساویست با مثلث س ب ج

زیرا کہ هر دو بر یك قاعدهٔ ب ج مابین متوازیین ب ج و ا س واقع شده اند

لکن (بموجب مفروض) ا ب ج بمساوی مثلث د ب ج میباشد

پس (بحکم علم ۱) مثلث د ب ج برابر است با مثلث س ب ج

یعنی مثلث بزرك مساویست با مثلث کوچك

واین امر غیر ممکن است ۞

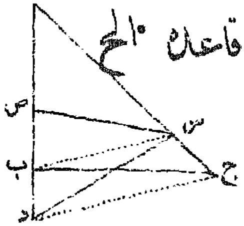
زیرا کہ جزو با کل برابر نباشد ۞

لهذا ا س متوازی نباشد ب ج را ۞

و بهمین دلیل ثابت توان نمود

کہ بغیر از خط ا د هیچ خط مستقیمی متوازی ب ج نخواهد شد

پس خط ا د متوازی خط ب ج میباشد ۞




لهذا مثلثات متساویه کہ بر یك قاعده الخ

سؤال (۱) درچه صورتی توان ثابت نمود
که مثلثین (ا ب ج) و (ا د س) باهم متساویند؟

جواب = درصورتیکه (ب س) متوازی باشد (د ج) را

سؤال (۲) درچه صورتی توان ثابت نمود
که (س ص) تنصیف نموده است هردو مثلث را
یعنی (ا ب ج) و (ا د س) را

جواب = درصورتیکه (ص) نقطهٔ وسطِ (ا د) باشد؟

مشق

(۱) هرگاه نقاط وسطِ اضلاعِ مثلثی را
بخطِ مستقیمی وصل نمائیم
این خط با قاعدهٔ آن متوازی خواهد بود؟

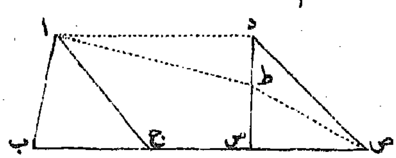
(۲) هرگاه دو خطِ مستقیم (ا ب) و (ج د) بر نقطهٔ (س) تقاطع نمایند
قسمیکه مثلث (ا س ج) مساوی باشد با مثلث (د س ب)
ثابت کن (ا د) و (ج ب) متوازیند؟

(۳) هرگاه در سؤالِ شکلِ (۳۸) (ا د) وصل شود
ثابت کن که مثلثین (ا ب ج) و (ا ب د) باهم متساویند؟

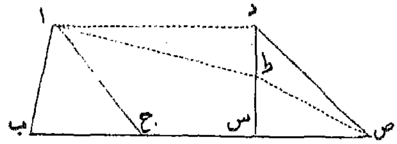
(۴) درشکلِ مذکوره (ص) نقطهٔ تقاطع (ا ب) و (د س) است
ثابت کن =
(اوّل) مثلث (ا د ص) مساویست با ذواربعة الاضلاع (ب ج س ص)؟
(دوم) مثلثین (ا ج ص) و (د ب ص) باهم متساویند؟

## شکل (۴۰) اثباتی

مثلثاتِ متساویه که قائم بریک جانبِ قواعدِ متساویه
و ممتد بریک خطِ مستقیم‌اند واقع شوند مابینِ خطوطِ متوازی




فرض کن دو مثلث (ا ب ج) و (د س ص) دریک جانب بر قواعدِ
متساویه (ب ج) و (س ص)
و بریک خطِ مستقیم (ب ص) واقع شده اند؟




پس هر دو مُثلّث مابینِ متوازیین واقع خواهند شد )۔

یعنی هرگاه (اد) را وصل کنیم

متوازیِ (ب ص) خواهد بود )۔

و هرگاه چنین نباشد

وضع شکل = پس (بحکم ش ۳۱) بشرطِ امکان

از نقطهٔ (ا) خارج کن (اط) واگر متوازے باشد با خطِ (ب ص)

وصل کن (ص ط) را

ثبوت پس (بحکم ش ۳۸) مُثلّثِ (ا ب ج) برابر است با مُثلّثِ

(ط س ص )۔

زیرا کہ بر قواعدِ مُتساویہ (ب ج) و (س ص )

و مابینِ متوازیینِ (ب ص) و (اد) واقع شده اند

لکن (بموجب مفروض) مُثلّثِ (ا ب ج) مساویست با مُثلّثِ

(د س ص )۔

لهذا (بحکم علم ۱) مُثلّثِ (د س ص) مساوی شد با مُثلّثِ

(ط س ص )۔

یعنی مثلّثِ بزرگ مساوی شد با مثلّثِ کوچک واین غیرممکن است

لهذا (اط) متوازی نباشد (ب ص) را )۔
وهمین دلیل ثابت توان نمود که بغیر از خطِ (ا د )
هیچ خطِ مستقیمی متوازی نخواهد شد (ب ص) را
پس (ا د) متوازی میباشد (ب ص) را
لهذا مثلثاتِ متساویه که قائم الخ

## تفهیم

(۱) این دعوی را باسلوب دیگر نیز ثابت کنند که احتیاج برهان خلف نباشد
وصل کن (ب د) و (ج د) را
پس (بحکم ش ۳۸) مثلثین (د ب ج) و (د س ص) باهم متساویند
ولکن (بموجب مفروض) مثلثِ (ا ب ج) مساویست با مثلثِ (د س ص)
پس (بحکم علم ۱) مثلثین (د ب ج) و (ا ب ج) باهم متساوی میباشند
لهذا (بحکم ش ۳۹) (ب ج) متوازی (ا د) میباشد )۔

(۲) چون در هر مثلث خطی که از نقطهٔ راس آن تا نقطهٔ وسطِ قاعده خارج شود
آن خط تنصیف مثلث میکند
ولکن بغیر از نقاط مذکوره
نقاطی در اضلاعِ مثلث میباشند که از آنجا توان تنصیفِ هر مثلث نمود
بیانِ سؤالاتِ شکل (۳۹)
میخواهیم مثلثِ (ا ب ج) را از نقطهٔ (س) تنصیف نمائیم
وصل کن (س ب) را
از نقطهٔ (ج) خارج کن خطِ (ج د) را که متوازی باشد با (س ب)
وصل کن (س د) را
تنصیف کن مثلثِ (س ا د) را بخطِ (س ص)
پس مثلثِ (ا ب ج) از نقطهٔ (س) تنصیف شده است

(دریاب کن این نکته را که چرا متوازی (س ب) از نقطهٔ (ج) خارج شده است
چه ممکن بود متوازی (س ب)
از نقطهٔ (ا) خارج شود)۔

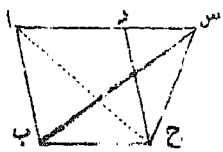
## مشق

(۱) در سؤالات شکل (۳۹)
مثلثِ (ا ب ج) از نقطهٔ (س) تنصیف شده است
پس در ضلع (ا ب) معین کن نقطهٔ را و از آن نقطه تنصیف کن مثلث را بهمه

(۲) در صورتیکه (س ص) منتصف مثلثین (ا ب ج) و (ا د س) میباشد
ثابت کن کہ ذو اربعة الاضلاع (ب ج س ص)
مساویست با مثلث (ا س ص)۔
(۳) ایضاً چون (ج د) متوازی (س ب) میباشد
ثابت کن مثلثین (ب ج د) و (س د ج) متساوینند۔
و کذلک مثلثین (د س ب) و (ج ب س) باهم متساوی میباشند)۔

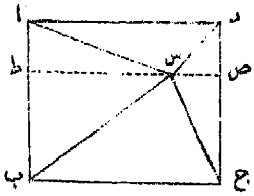
## شکل (۴۱) اثباتی

هرگاه متوازی الاضلاع و مثلث بریک قاعده و مابین متوازیین واقع باشند پس متوازی الاضلاع دو چند مثلث خواهد بود

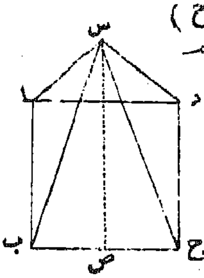



فرض کن متوازی الاضلاع (ا ب ج د) و مُثلث (س ب ج)
مابین متوازیین (ب ج) و (ا س) واقع شده اند)۔
پس متوازی الاضلاع (ا ب ج د) مضاعف مُثلث (س ب ج) خواهد بود
وضع شکل = وصل کن (ا ج) را
پس (بحکم ش ۳۷) مُثلث (ا ب ج) برابر است با مُثلث (س ب ج)
ثبوت = زیراکه بریک قاعدهٔ (ب ج) و مابین متوازیین
(ب ج) و (ا س) واقع میباشند)۔
لکن متوازی الاضلاع (ا ب ج د) دو چند است نسبت بمُثلث (ا ب ج)
زیراکه (بحکم ش ۳۴) قطر (ا ج) تنصیف میکند متوازی الاضلاع
پس متوازی الاضلاع (ا ب ج د) دو چند است نسبت بمُثلث (س ب ج)

## لهذا هرگاه متوازی الاضلاع و مثلث بریک قاعده الخ




سؤال = (۱) در متوازی الاضلاع (ا ب ج د)۔
چه فهم توان ثابت نمود که مجموعۂ مثلثین (س ا ب) و (س د ج)
مساوی است با مجموعۂ مثلثین (س د ا) و (س ج ب)
جواب = از اخراج خط (ص ط) که متوازی باشد با (ا د) یا (ب ج)
و قاطع باشد نقطۂ رؤس مثلثین متقابله را)۔




سؤال = (۲) در متوازی الاضلاع (ا ب ج د)
چه فهم توان ثابت نمود که مجموعۂ مثلثین (س ب ا) و (س ج د)
بمساوی نصف متوازی الاضلاع معلوم است
جواب = هرگاه از رؤس مثلثین خارج شود خط (س ص)
که متوازی باشد با (ا ب) ثبوت دعوی معلوم خواهد بود)۔

## مشق

(۱) در شکل (۴۱) از نقطۂ (ج) خارج کن متوازی (ب س)
و ثابت کن شکل را)۔

(۲) هرگاه متوازی الاضلاع و مثلث بر قواعد متساوی و مابین متوازیین واقع شوند
پس متوازی الاضلاع نسبت بمثلث دوچند خواهد بود)۔

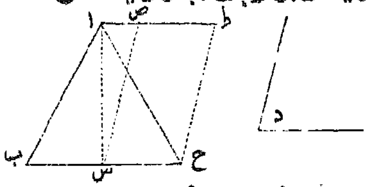
(۳) هرگاه قاعدۂ مثلثی دوچند باشد نسبت بمتوازی الاضلاع
و هر دو مابین متوازیین باشند
پس هر دو باهم متساوی خواهند بود)۔

(۴) هرگاه در سطح متوازی الاضلاع نقطۂ معین شود
و از آن نقطه تا گوشه های شکل خطوط مستقیم خارج شوند
پس از این عمل دو مثلث که بر اضلاع متقابله متشکل شوند
مجموعۂ هر دو مثلث بمساوی نصف متوازی الاضلاع خواهد بود

(۵) خارج از سطح متوازی الاضلاع نقطهٔ را اختیار کن
وموافق عمل مذکور بنما صورت دعوی را)ء
(۶) متوازی الاضلاعیکه احاطه نموده باشد اجزاء متوازی الاضلاع دیگر را
قسمیکه اضلاع شکل محیط متوازی باشند با اقطار شکل داخلی
پس شکل داخلی مساوی نصف شکل خارجی خواهد بود)ء
(۷) آن اشکال ذوا ربعة الاضلاع باهم متساوی خواهند بود
که اوتار آنها و زوایای متشکلهٔ اوتار
که از تقاطع صورت گیرند متساوی باشند)ء

## شکل (۴۲) عملی

متوازی الاضلاعی بنا کن که مساوی باشد با مثلث معلوم
و یک زاویهٔ آن برابر باشد با زاویهٔ معلومهٔ مستقیمة الخطین




فرض کن ا ب ج مثلث معلوم و د زاویهٔ معلوم مستقیمة الخطین
مطلوب اینست که بمساوی مثلث (ا ب ج) متوازی الاضلاعی مرتسم شود
که یک زاویهٔ آن برابر باشد با زاویهٔ (د)
وضع شکل = (بحکم ش ۱۰) تنصیف کن (ب ج) را بر نقطهٔ س
و (بحکم ش ۲۳) د ر خط مستقیم (س ج) بر نقطهٔ (س)
بساز زاویهٔ (ج س ص) را
که مساوی باشد با زاویهٔ (د)ء
و (بحکم ش ۳۱) از نقطهٔ (ج) خارج کن خط ج ط را
که متوازی باشد با خط (س ص)ء

واز نقطهٔ ا خارج کن خطِ اص ط را
کہ متوازی باشد باس ج.
لهذا (بحکم حد ۳۳) ج س ص ط متوازی الاضلاع خواهد بود ٭
وصل کن (اس) را ٭
ثبوت = چونکه (ب س) بمساوی (س ج) است
لهذا (بحکم ش ۳۸) مُثلّثِ (اب س) مساویست با مُثلّثِ (اس ج)
زیراکه بر قواعد متساویهٔ (ب س) و (س ج)
ومابینِ متوازیینِ (ب ج) و (اط) واقع شده اند ٭
لهذا مثلّثِ (اب ج) دوچنداست نسبت بمثلّثِ (اب س)
لکن (بحکم ش ۴۱) متوازی الاضلاع (ص س ج ط)
دوچنداست نسبت بمثلّثِ (اس ج)
زیراکه هردو بریك قاعدهٔ (س ج)
ومابینِ متوازیینِ (س ج) و (اط) واقع شده اند ٭
پس (بحکم علم ۶) متوازی الاضلاع (ص س ج ط)
بمساویِ مُثلّثِ (اب ج) میباشد ٭
ویك زاویهٔ آن یعنی (ج س ص) بمساوی زاویهٔ (د) تشکیل یافته است
لهذا بمساوی مثلّثِ (اب ج) متوازی الاضلاع (ص س ج ط)
که یك زاویهٔ آن برابراست با زاویهٔ (د) مرتسم گردید وهم این مراد بود

مشق

(۱) متوازی الاضلاعی بساز که بساوی مربّع معلوم وقائم بر یک قاعده باشند ونیز یک زاویهٔ آن قائمه باشد )۔

(۲) برابر متوازی الاضلاع بساز شکل معین را که بر قاعده متوازی الاضلاع مذکور واقع باشد وبناءً در چه صورتی ارتسام این معین غیر ممکن است )۔

(۳) مستطیل بساز که برابر مثلث معلوم مستوی باشد )۔

(۴) مساوی متوازی الاضلاع معلوم مثلث بساز که یک زاویهٔ آن برابر زاویهٔ معلوم باشد )۔

(۵) برابر متوازی الاضلاع معلوم بر قاعدهٔ آن بساز مثلث قائم الزاویه را )۔

(۶) برابر مثلث معلوم معین بساز )۔

حل = هرگاه در قطر متوازی الاضلاع نقطهٔ معین شود واز آن نقطه خطوطِ مستقیمه که متوازی باشند با اضلاع آن شکل خارج شوند

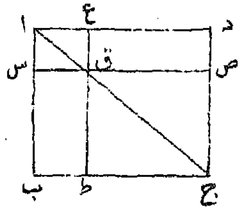
پس شکل موصوف در چهار ذوار بعة الاضلاع یعنی متوازی الاضلاع منقسم خواهد شد واز این چهار دو متوازی الاضلاع را که خطِ قطر از آن میگذرد اشکال حوالی قطرِ متوازی الاضلاع نامند وهر یکی از آن دو متوازی الاضلاع باقی را که با تّصالِ آن شکل مذکور تمام میشود مُتمّمِ متوازی الاضلاع گویند )۔

مثلاً در شکل (۴۳) (ا س ق ع) و (ق ط ج ص) که دو متوازی الاضلاع میباشند گرداگرد قطر واقع شده اند

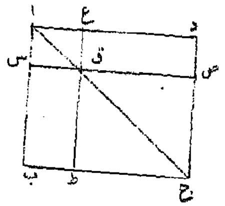
اشکال حوالی قطر نامند
و (ع ف ص د) و (س ب ط ق) کہ دو متوازی الاضلاع عند
متمّم متوازی الاضلاع گویند ؎
و غالبًا متوازی الاضلاع را بدو حرف مفرد
کہ بر دو گوشۀ ان مرقوم باشند موسوم سازند ؎

## شکل (۴۳) اثباتی

اشکال متوازی الاضلاع کہ حوالی قطر متوازی الاضلاع
واقع شوند متمّمان ان باہم متساوی میباشند




فرض کن (ا ب ج د) متوازی الاضلاع و قطر ان (ا ج) است
(س ع) و (ط ص) دو متوازی الاضلاع کہ حوالی قطر واقع شدہ اند
یعنی اشکالیکہ (ا ج) از وسط انہا میگذرد ؎
و (ق ب) و (ق د) متمّمان باشند ؎
یعنی باتّصال انہا شکل تمام میشود ؎
پس متمّم (ب ق) بمساوی متمّم (ق د) خواہد بود ؎
ثبوت = چونکہ (ا ب ج د) متوازی الاضلاع است




وقطر آن (اج) میباشد
لهذا (بحکم ش ۳۴) مثلثِ (ابج) بمساوی مثلثِ (ادج) میباشد
ایضاً چونکه (اس قع) متوازی الاضلاع است
وقطرِ آن (اق)
لهذا مثلثِ (اس ق) بمساوی مثلثِ (اع ق) میباشد
وبهمین دلیل مثلثِ (ق طج) بمساوی مثلثِ (ق ص ج) میباشد
وچونکه (اس ق) بمساوی (اع ق)
و(ق طج) بمساوی (ق ص ج) میباشد
لهذا (بحکم علم ۲) مجموعهٔ مثلثینِ (اس ق) و (ق طج)
مساویست با مجموعهٔ مثلثینِ (اع ق) و (ق ص ج)
ولکن در فوق ثابت شد که کلِ مثلثِ (اب ج)
مساویست با کلِ مثلثِ (ادج)
پس (بحکم علم ۳) متممِ (ب ق) مساویست با متممِ (ق د)
(یعنی بعد از اسقاطِ متساویات)
لهذا اشکال متوازی الاضلاع که حوالی قطر الخ

## مشق

(۱) هرگاه (ق ب) و (ق د) موصول شوند
پس مثلث (ا ق ب) مساوی مثلث (ا ق د) خواهد بود »

(۲) ثابت کن متوازی الاضلاع (س د) مساویست با متوازی الاضلاع (ب ع)

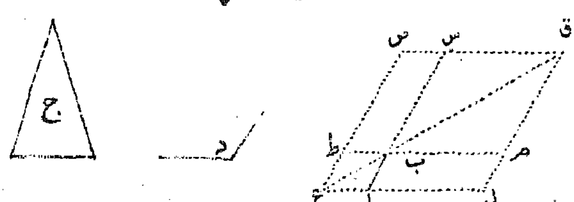
(۳) ثابت کن اشکالیکه حوالی قطر معین واقع شوند
آن اشکال نیز معین باشند »
و اشکالیکه حوالی قطر مربع واقع شوند
مربع خواهند بود »

(۴) بنما در چه صورتی متممان متوازی الاضلاع از هر حیثیت باهم متساوی باشند
یعنی بریکدیگر منطبق شوند »

(۵) متوازی الاضلاع (ا ب ج د) در هشت متوازی الاضلاع تقسیم شده است
هر یکی را باسم خود موسوم ساز
و ثابت کن که با متوازی الاضلاع (ا ب ج د)
متساوی الزوایا میباشند »

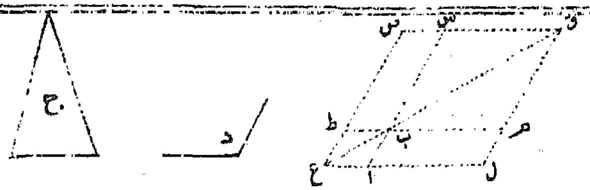
## شکل (۴۴) عملی

بر خط مستقیم معلوم بنا متوازی الاضلاعی را که متساوی باشد با مثلث مفروض و یک زاویهٔ آن برابر باشد با زاویهٔ مستقیمة الخطین مفروض




فرض کن (ا ب) خط مستقیم مفروض (ج) مثلث مفروض و (د) زاویهٔ مستقیمة الخطین مفروض »

مطلوب اینست که بر خط مستقیم (ا ب) متوازی الاضلاعی رسم شود که مساوی باشد با مثلث (ج) ॰




ویک زاویهٔ آن برابر باشد با زاویهٔ (د)
وضع شکل (بحکم ش ۴۲) بمساوی مثلث ج)
بسازبر (اب) ممدوده متوازی الاضلاع (ب س ص ط) را
قسمیکه زاویهٔ (س ب ط) برابر باشد با زاویهٔ (د)
ایضاً خارج کن (ص ط) را تا نقطهٔ (ع)
و (بحکم ش ۳۱) از نقطهٔ (ا) خارج کن خطِ (اع) را
که متوازی باشد با (ب ط) یا (س ص)
وصل کن (ب ع) را
چونکه بر خطوطِ متوازیهٔ (اع) و (س ص)
خط (ع ص) واقع میشود
لهذا (بحکم ش ۲۹) زاویتینِ (اع ص) و (ع ص س)
بمساوی دو قائمه میباشد ؎
و امّا مجموعهٔ زاویتینِ (ب ع ص) و (ع ص س)
کمتراست از دو قائمه
لهذا (بحکم علم ۱۲) (ع ب) و (ص س) پس از امتدادِ متواتر
باهم وصل خواهند شد ؎

تصوّر نماکہ بعد از خروج بر نقطۂ (ق) اتّصال پیدا کنند
پس بحکم ش (۳۱) از نقطۂ (ق) خارج کن
خطِ (ق ل) راکہ متوازی باشد با (س ا) یا (ص ع)
ایضًا خارج کن خطّینِ (ع ا) و (ط ب) را
قسمیکہ با خطِ (ق ل) بر نقاطِ (ل) و (م) موصول شوند ×
ثبوت = لهذا (ع ل ق ص) متوازی الاضلاع
و قطرِ آن (ع ق) میباشد ×
و متوازی الاضلاع (اط) و (مس) اشکالِ حوالی قطر
و متمّمانِ آن (ل ب) و (ب ص) میباشند ×
امّا متمّم (ب ص) بمساوی مثلّثِ (ج) مرتسم شده است
لهذا (ل ب) بمساوی مثلّثِ (ج) میباشد ×
و چونکہ بحکم ش (۱۵) زاویتینِ (ط ب س) و (ا ب م) باہم متساوی اند
و زاویۂ (ط ب س) بمساوی زاویۂ (د) ساختہ شده است
پس بحکم علم ۱) زاویۂ (ا ب م) مساوی است با زاویۂ (د)
لهذا بر خطِ مستقیم (ا ب) متوازی الاضلاع (ل ب)
بمساوی مثلّثِ (ج) مرتسم گردید
کہ یک زاویۂ آن یعنی (ا ب م) برابر شد با زاویۂ (د)
و مراد همین بوده
مشق =

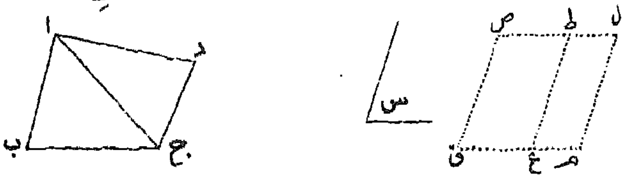
(۱) برخطِ مستقیم معلوم مستطیل بساز
که مساوی باشد با مستقیمة الاضلاع معلوم »

(۲) برخطِ مستقیم معلوم مثلث بساز
که مساوی متوازی الاضلاع معلوم باشد
ویك زاویهٔ آن برابر باشد بازاویهٔ معلوم »

(۳) مستطیل بساز که مساوی باشد با دو مستطیل
که سطوح آنها غیر متساوی باشند »

## شکل (۴۵) عملی

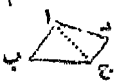
متوازی الاضلاعی بساز که متساوی باشد با مستقیمة الاضلاع معلوم ویك زاویهٔ آن برابر باشد بازاویهٔ مستقیمة الخطین معلوم




فرض کن (ا ب ج د) مستقیمة الاضلاع معلوم
و (س) زاویهٔ مستقیمة الخطین معلومه
مقصود اینست که متوازی الاضلاعی مرتسم شود
که مساوی باشد با شکلِ (ا ب ج د)
ویك زاویهٔ آن نیز مساوی باشد بازاویهٔ (س) »
وضع شکل = وصل کن (ا ج) را
و (بحکم ش ۴۲) بمساوی مثلثِ (اج ب)
بساز متوازی الاضلاع (ص ع) را
که یك زاویهٔ آن یعنی (ص ق ع) برابر باشد بازاویهٔ (س) »

(بحکم ش ۴۴) بر خطِ مستقیم (طع)
بساز متوازی الاضلاع (طم) را
کہ مساوی باشد با مثلث (ادج)
و یک زاویۂ آن یعنی (طع م) برابر باشد با زاویۂ (س)
لهذا شکل (ص ق م ل) متوازی الاضلاع مطلوب خواهد بود
ثبوت = چونکہ ہر یکی از زاویتین (ص ق ع) و (طع م)
بمساوی زاویۂ (س) ساختہ شدہ است
لهذا (بحکم علم ۱) زاویۂ (ص ق ع) برابر است با زاویۂ (طع م)
بر ہر یکی از این متساویات بیفزای زاویۂ (ق ع ط) را
پس (بحکم علم ۲) مجموعۂ زاویتین (ص ق ع) و (ق ع ط)
مساوی است با مجموعۂ زاویتین (ق ع ط) و (طع م)
ایضاً (بحکم ش ۲۹) چونکہ خط (ص ق) و (طع) باہم متوازیند
و (ق ع) بر آنہا واقع میشود
لهذا زاویتین (ص ق ع) و (ق ع ط) بمساوی دو قائمہ میباشند
و کذلک زاویتین (ق ع ط) و (طع م) بمساوی دو قائمہ اند
بنا برین (بحکم ش ۱۴) خط (ق ع) و (ع م) بر یک خطِ مستقیم
واقع میباشند
ایضاً چونکہ بر خطوطِ متوازیۂ (ق م) و (ص ط) خطِ مستقیم
(ع ط) واقع میشود

لهذا (بحکم ش ۲۹) زوایای متبادله (م ع ط) و (ع ط ص) باهم متساویند ))

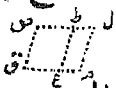


و هر یکی ازین متساویات بیفزای زاویهٔ (ع ط ل) را

لهذا زاویتین (م ع ط) و (ع ط ل) بمساوی زاویتینِ (ع ط ص) و (ع ط ل) میباشند ))



لکن (بحکم ش ۲۹) چونکه (ع م) و (ط ل) باهم متوازیند و (ع ط) بر آنها واقع میشود



لهذا زاویتینِ (م ع ط) و (ع ط ل) بمساوی دو قائمه میباشند ))

وکذلك زاویتینِ (ع ط ص) و (ع ط ل) نیز بمساوی دو قائمه باشند

پس (بحکم ش ۱۴) (ص ط) و (ط ل) در یك خطِ مستقیم میباشند

و چونکه از خطّینِ (ق ص) و (م ل) هر یکی متوازیست با (ع ط)

لهذا (بحکم ش ۳۰) (ق ص) متوازی (م ل) است ))

امّا (ص ل) با خطِ (ق م) متوازی مرتسم شده است

لهذا (بحکم حد ۳۳) شکلِ (ق ص ل م) متوازی الاضلاع میباشد

و چونکه متوازی الاضلاع (ع ص) بمساوی مثلّثِ (ا ب ج) مرتسم شده

و نیز متوازی الاضلاع (م ط) بمساوی مثلّث (ا د ج) تشکیل یافته است

لهذا (بحکم علم ۲) تمام مستقیمة الاضلاع (ا ب ج د)

برابر است با تمام متوازی الاضلاع (ق ص ل م)

که یك زاویهٔ آن یعنی (ص ق م) بمساوی زاویهٔ (س) میباشد ـــ

و مراد

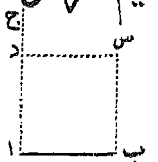
ومراد همین بوده است
(موافق همین سلسلهٔ استدلال که مرقوم افتاد میتوان متوازی الاضلاعی ساخت که مساوی باشد با مستقیم الاضلاعی که زیاده از چهار ضلع داشته باشد)

## مشق

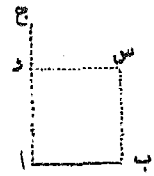
(۱) برخطِ مستقیم معلوم مستطیل بساز که مساوی باشد با مستقیم الاضلاع معلوم)
(۲) سطحِ مستطیل ویک ضلعِ آن معلوم است ضلع دیگر را پیدا کن)
(۳) بمساوی مجموعهٔ دو مستقیم الاضلاع یا بمساوی فرق آن متوازی الاضلاعی بساز)
(۴) بر دو خط مستقیم متقاطع بساز یک مربع ویک معیّن را که هر دو باهم متساوی باشند)

## شکل (۴۶) عملی

برخطِ مستقیم مفروض مربّع بساز




فرض کن (اب) خطِ مستقیم مفروض
مطلوب اینست که بر (اب) شکلِ مربّع مرتسم شود)
وضع شکل - (بحکم ش ۱۱) از نقطهٔ (ا) خارج کن خطِ (اج) را
قسمیکه با (اب) زاویهٔ قائمه پیدا کند)
و (بحکم ش ۳) ا د را برابر (اب) معیّن کن
از نقطهٔ (د) خارج کن خطِ (دس) را که متوازی باشد با (اب)
واز نقطهٔ (ب) خارج کن (بس) را که متوازی باشد با (اد)
لهذا شکلِ (ابسد) مربّع مطلوب خواهد بود)




ثبوت = زیراکہ (اب س د) متوازی الاضلاع مرتسم شدہ است
لهذا (بحکم ش ۳۴) (اب) بمساوی (د س) و (ا د) بمساوی (ب س)
میباشد ہ۔
ولکن (اب) برابر (ا د) خارج شدہ است
لهذا (بحکم علم ۱) هر چهار خط مستقیم
یعنی (ب ا) و (ا د) و (د س) و (س ب) باهم متساویند
وشکل (ا د س ب) متوازی الاضلاع میباشد
همین تفصیل تمام زوایای ان قائمه اند
زیراکہ خط مستقیم (ا د) بر خطوط متوازیہ (اب) و (د س) واقع شدہ است
و (بحکم ش ۲۹) مجموعۂ زاویتین (ب ا د) و (ا د س) بمساوی دو قائمہ
میباشند
ولکن زاویۂ (ب ا د) قائمہ مرتسم شدہ است
لهذا زاویۂ (ا د س) هم قائمہ میباشد ہ۔
وچونکه (بحکم ش ۳۴) زوایای متقابلہ هر متوازی الاضلاع
باهم متساوی میباشند
لهذا (بحکم علم ۱) زاویتین (ا ب س) و (ب س د) کہ مقابل واقع شدہ اند

بمساوی و قائمه میباشند ۔

پس شکلِ (ا ب س د) قائم الزوایا میباشد ۔
و اما در فوق ثابت شد که شکل مذکور متساوی الاضلاع هم میباشد
لهذا (بحکم حد ۳۰) شکلِ (ا ب س د) مربع میباشد که بر خط مستقیم (ا ب)

از این مبحث ظاهر میشود که متوازی الاضلاعی که یک زاویهٔ آن
قائمه باشد باقی زوایای آن بالتبع قائمه خواهند بود ۔
ایضاً بر خطوط متساویه مربعات متساویه تشکیل یابد =
و مربعاتِ متساویه را اضلاع متساویه میباشند ۔

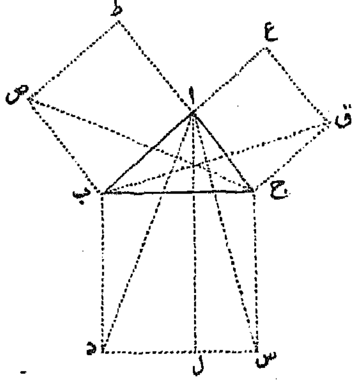
## مشق

(۱) بر قطر معلوم مربع بساز ۔
(۲) بر اضلاع مربع یا بر اضلاع ممدودهٔ آن هرگاه از زوایای اربعهٔ مربع بفاصلهٔ متساوی
نقاط معین نموده باهم وصل شوند
مربع دیگر بیرون یا داخلِ مربع معلوم متشکل خواهد شد ۔
ایضاً مخمس منتظم و مسدس منتظم محکوم همین حکم است ۔
(۳) یک مربع را در پنج قسمت تقسیم کن
قسمیکه از آنها چهار مثلث قائم الزاویه تشکیل یابد و قسمت پنجم مربع باشد ۔
(۴) خطیکه از نقطهٔ وسطِ ضلعِ متوازی الاضلاع تا نقطهٔ وسطِ ضلعِ دیگر
که در پهلوی آن واقع است کشیده شود ثمنِ شکل خواهد نمود
یعنی یک ثمن شکل را قطع خواهد نمود ۔
(۵) مربع را تقسیم کن قسمیکه یک نیمهٔ آن مربع باشد ۔
(۶) مربع را در پنج قسمت متساوی تقسیم کن
قسمیکه یک قسمت آن مربع باشد
و هر یکی از باقی چهار شکل منحرف ۔
(۷) اشکال خمسهٔ مذکوره را بساز بسمتِ مثلثِ قائم الزاویه که عمود آن دو چند باشد
نسبت بقاعده ۔

## شکل (۴۷) اثباتی

مربع مرتسمه بر وترِ مثلثِ قائم الزاویه مساوی میباشد

با مجموعهٔ دو مربع که بر باقی ضلعین آن مرتسم میشوند




فرض کن (ا ب ج) مثلث قائم الزاویه که یک زاویهٔ آن یعنی (ب ا ج) قائمه میباشد

پس مربعی که بر (ب ج) ساخته شود مساوی خواهد بود با دو مربع که ساخته شوند بر (ب ا) و (ا ج)

وضع شکل = (بحکم ش ۴۶) بساز بر (ب ج) مربع (ب د س ج) را

و بر (ب ا) مربع (ط ب) و بر (ا ج) مربع (ع ج) را

و (بحکم ش ۳۱) از نقطهٔ (ا) خارج کن خط (ا ل) را که متوازی باشد

با (ب د) یا (ج س)

وصل کن (ا د) و (ص ج) را

ثبوت = چونکه (بموجب مفروض) زاویهٔ (ب ا ج) قائمه میباشد

پس (بحکم حد ۳۰) زاویهٔ (ب ا ط) نیز قائمه میباشد

ایضاً چونکه خطوط مستقیمهٔ (ا ج) و (ا ط) که از دو سمت متقابل ممتد شده اند

و در خط (ا ب) بر نقطهٔ (ا) وصل میشوند

ودو

ودرهر دو جانبِ آن دو زاویهٔ متصله بمساوی و قائمه پیدا کنند

لهذا (بحکم شرع ۱۴) (ج ا) و (ا ط) در یك خطِ مستقیم میباشند

وبهمین دلیل ثابت است که (ا ب) و (ا ع) نیز در یك خطِ مستقیم واقعند

وزاویتین (د ب ج) و (ص ب ا) باهم متساویند۔

زیراکه هریکی ازانها قائمه میباشد ۸ـ

بیفزاے برهریکی ازاین متساویات زاویهٔ (ا ب ج) را

لهذا (بحکم علم ۲) کلِ زاویهٔ (د ب ا) برابراست باکلِ زاویهٔ (ص ب ج)

وچون ضلعِ (ا ب) بمساوی ضلعِ (ب ص) است وضلعِ (ب د)

بمساوی (ب ج)

ونیز زاویهٔ (د ب ا) برابراست بازاویهٔ (ص ب ج)

پس (بحکم شرع ۴) مثلثِ (ا ب د) مساویست بامثلثِ (ص ج ب)

لهذا (بحکم شرع ۴۱) متوازی الاضلاع (ب ل) دوچنداست نسبت

بمثلثِ (ا ب د)

زیراکه هردو بریك قاعدهٔ (ب ج) مابین متوازیین (ب د) و (ا ل) واقع

میباشند ۸ـ

ایضاً مربع (ط ب) دوچنداست نسبت بمثلثِ (ص ج ب) ۸ـ

زیراکه هردو بریك قاعدهٔ (ص ب) مابینِ متوازیینِ (ص ب) و

(ط ج) واقع میباشند ۸ـ

لهذا (بحکم علم ۶) مضاعفِ متساویات باهم متساوی میباشند

پس متوازی الاضلاع (ب ل) برابر است با مربع (ط ب)
علی هذا القیاس هرگاه (ا س) و (ب ق) موصول شوند ثابت توان نمود
که متوازی الاضلاع (ج ل) مساوی است با مربع (ج ع)
بنابراین (بحکم علم ۲) کل مربع (ب د س ج)
مساوی میباشد با دو مربع (ط ب) و (ع ج)
لهذا ثابت شد که مربع مرتسم بر ضلع (ب ج)
که وتر مثلث معلومه میباشد مساوی است با دو مربع
باقی ضلعین و مراد همین بوده است

## مشق =

(۱) ثابت کن در این شکل =
(اوّل) = هرگاه (ب ط) و (ج ع) موصول شوند خطین واصل باهم متوازی خواهند بود
(دوم) = نقاط (ص ا ق) در یک خط مستقیم واقع شوند است
(سوم) = (ص ج) و (ا د) بایکدیگر زاویهٔ قائمه تشکیل نمایند است
(چهارم) = هرگاه (ط ع) و (ق س) و (ص د) باهم وصل شوند
ازهرجهت مثلث (ط ا ع) مثل مثلث معلومه خواهد بود است

(۲) بر هر مثلث (ا ب ج) که بر ضلعین (ا ب) و (ا ج)
مربعات (ا ب ص ط) و (ا ج ق ع) مرتسم شوند
و این مربعات بجانب مثلث واقع شوند یا بجانب بیرون از مثلث
در هر دو صورت خطوط مستقیمه (ب ع) و (ج ط) باهم متساوی خواهند بود است

(۳) در هر مثلث (ا ب ج) که بر اضلاع آن مثلثات متساوی الاضلاع (ب ج م) و
(ج ا ی) و (ا ب ه)
مرتسم شوند تمام بسمت داخل مثلث معلومه باشند یا بسمت خارج آن
در هر دو صورت (ا م) و (ب ی) و (ج ه) باهم متساوی خواهند بود است

(۴) بر قطر مربعی چون مربع دیگر ساخته شود دو چند خواهد بود نسبت بمربع اوّل است

(۵) (ا ب ج) مثلث متساوی الاضلاعی است
و از نقطهٔ (ا) عمود (ا د) بر (ب ج) خارج شده است
ثابت کن مربع (ا د) سه چند است نسبت بمربع (ب د)

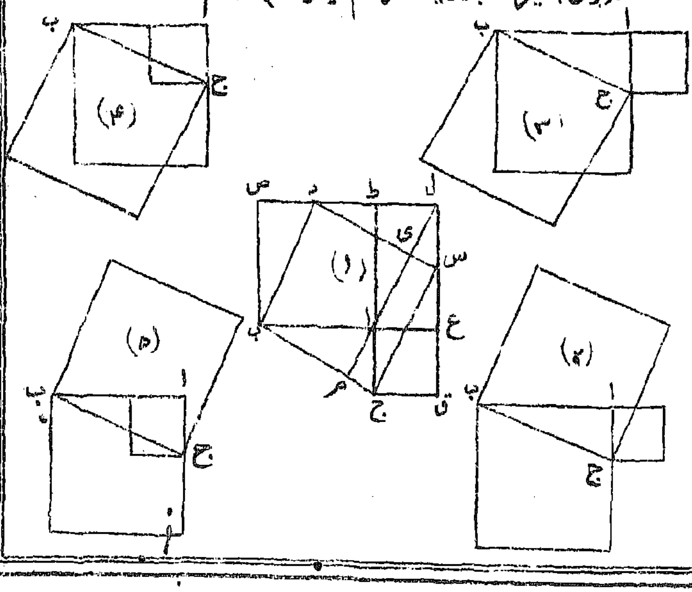
(۶) مربعی بساز که مساوی دو مربع باشد است

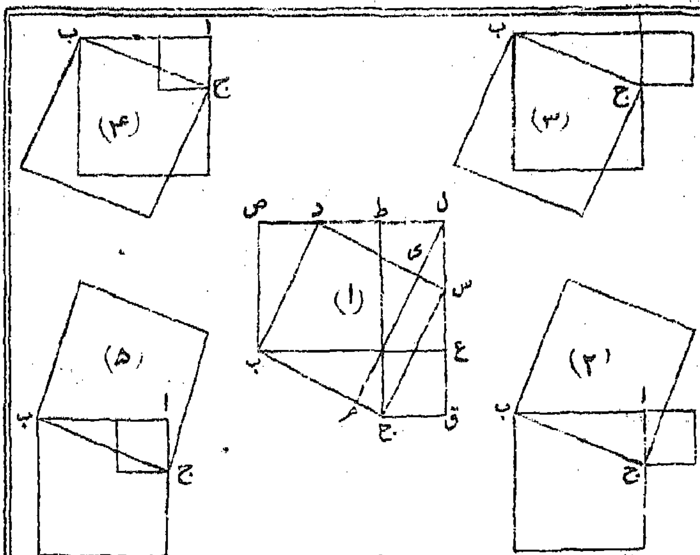
(۷) از نقطهٔ (ا) که راس مثلّث (ا ب ج) میباشد
عمود (ا د) بر قاعدهٔ آن قائم شده است
ثابت کن فرقِ مربعات (ا ب) و (ا ج) مساوی خواهد بود
با فرقِ مربعات (ب د) و (ج د) ہے

(۸) هرگاه در مثلّث (ا ب ج) نقطهٔ مشلاً (د) معیّن شود
و از آن نقطه عمائد (س) و (ص) و (ط) بر اضلاعِ
(ب ج) و (ج ا) و (ا ب) قائم شوند
ثابت کن که مجموعهٔ مربعاتِ حصصِ (ا ط) و (ب س) و (ج ص)
برابر است با مجموعهٔ مربعاتِ حصصِ (ا ص) و (ج س) و (ب ط)

## تفهیم

(۱) اقلیدس در این شکل همان صورت را ثابت نموده است که هر سه مربع بسمتِ بیرونِ شکل مرتسم شوند
ولکن محقق طوسی علیه الرّحمه در تحریری نویسد که موافق جهاتِ اضلاعِ مثلّث ممکن است ارتسام مربعات و در آن هشت صورت ممکن
زیرا که هر ضلعی دو جهت دارد پس دو ضلع را چهار جهت باشد
و ضلع سوم را نیز دو جهت است
پس جهاتِ اربعهٔ ضلعینِ اول را با هر یکی از دو جهتِ ضلعِ سوم توان تشکیل نمود
بنا بر این هشت جهت میباشد ہے
امّا اشکالی که از این عمل صورت بندد این پنج شکل متصوّر است
که برای بصیرت مبتدیان مرتسم میگردد ہے






اوّل = بر دو ضلع کوچك دو مربع کوچك بطرف بیرون
و مربع بزرك بطرف داخل ٭
دوم = مربع بزرك و یك کوچك بطرف داخل
و یك مربع کوچك بطرف بیرون ٭
سوّم مربع بزرك و یك کوچك بطرف بیرون
و یك مربع کوچك بطرف داخل ٭
چهارم = دو مربع کوچك بطرف داخل
و مربع بزرك بطرف بیرون ٭
پنجم = هر سه مربع بطرف داخل مثلّث مرتسم شوند ٭
در اینجا شکل اول که بر مثلث قائم الزاویه مختلف الاضلاع ساخته شده است
ثابت میشود و حلّ باقی اشکال بمفهومات مبتدیان محوّل ٭
مبتدی را لازم است که عمل مذکوره را بر قائم الزاویه متساوی الساقین
هم ساخته منحل سازد ٭
فرض کن بر (ا ب) مربع (ص ا) و بر (ا ج) مربع (ا ق) ساخته شده است ٭
وضع شکل = خارج کن (ق ع) و (ص ط) را تا نقطهٔ (ل)
در (ص ط) معیّن کن نقطهٔ (د) قسمیکه
(ص د) بمساویّ (ا ج) باشد ٭
وصل کن (ب د) را
و از نقطهٔ (ج) خارج کن (ج س) را که با (ب د) متوازی باشد ٭
وصل کن (د س) را ٭
پس بر (ب ج) مربع (ج د) قائم میشود ٭

از نقطهٔ (ا) خارج کن (ل م) را که متوازی باشد با (س ج) یا (د ب) ٭

ثبوت = لهذا بحکم ش ۳۶ مربع (ص ا) بمساوی متوازی الاضلاع (ل ب) میباشد

زیراکه هردو بریک قاعدهٔ (ا ب) واقعند ٭

و چونکه در مثلثین (ا ب م) و (ل د ی)

ضلع (ب ا) برابر (د ل) و ضلع (ب م) برابر (د ی) میباشد

و نیز زاویهٔ (ب م ا) بمساوی زاویهٔ (د ی ل) است

لهذا قواعد (ا م) و (ل ی) باهم برابر و مثلثین نیز باهم متساوی میباشند

بنابراین متوازی الاضلاع (ل ب) که بمساوی (ص ا) ثابت شده است

برابراست با متوازی الاضلاع (د م)

یعنی (د م) و (ص ا) باهم متساوی میباشند ٭

و امّا مستطیل (س ه) باندک توجّه ثابت شود که بمساوی (ل ج) است

و بحکم ش ۳۰ (ل ج) بمساوی (ا ق) است

زیراکه هردو بریک قاعدهٔ (ا ج) واقعند

لهذا مربع (ص ا) و (ا ق) بمساوی مربع (د ج) میباشند ٭

(۲) در علم هندسه این شکل کثیر النفع (یعنی ۴۷) معروف و موسوم است بشکل عروس

گویند موجدان حکیم فیثاغورس (صوری است) ٭

افسانهای عجیب برآن حکایات ساخته اند غریب تر آنکه گویند

زمانیکه برار تسام این شکل وقوف حاصل شده بود

جهت شکرانه این موهبت حیوانات را برای قربانی بمعابد خود هدیه فرستاده بودند

هرجهت اساتید متاخرین طرق متعدده برای اثبات این معنی نگیخته

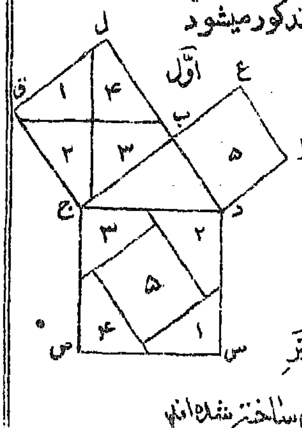
و انواع اشکال ساخته اند که از آن تشفّی خاطر مبتدیان میشود

باین معنی که مربع وتر هر مثلث قائم الزاویه برابر است

با دو مربع که بر باقی ضلعین آن ساخته شوند

منجمله آن اشکال این شکل که نتیجهٔ افکار مهندسین است

برای بصیرت طالب العلم در اینجا ثبت و مذکور میشود



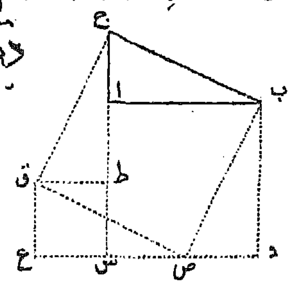

مثلاً (ب ج د) مثلث قائم الزاویه است و بر وتر

آن مربع (ج د س ص)

و بر ضلعین آن مربع (ب د ط ع) و (ب ج ق ل) ساخته شده اند

مرکز مربع (ب ج ق ل) را پیدا کن
(در نقطهٔ کرد و قطر مربع تقاطع نمایند مرکز مربع میباشد و این دو قطر
در شکل مذکوره مرتسم نشده اند)
و بر این مرکز خارج کن خطی که متوازی باشد با (ج د)
و خط دیگر بران عمود کن که انهم از مرکز بکذرد
پس این مربع در چهار ذوار بعة الاضلاع منقسم خواهد شد
که از هر حیثیت باهم متساوی خواهند بود ۞
و در هر ضلعی از اضلاع مربع (ج د س ص) از نقاط وسط
خارج کن خطوط مستقیمه را که متوازی باشند با (ب ج) و (ب د)
در اینصورت حصص ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ باهم منطبق خواهد شد ۞

دوم



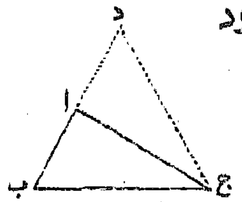

فرض کن (ا ب ج) مثلث قائم الزاویه و (ا) زاویهٔ قائمه
پس مربع مرتسم بر وتر (ج ب) مساوی خواهد بود با دو مربع (ب ا) و (ا ج)
وضع شکل = (بحکم ش ۶ ۴) بساز بر (ا ب) مربع (ا ب د س) را
و (بحکم ش ۳) قطع کن از (د س) و (س ا) مقدار (د ص) و (س ط) را
که هر یکی مساوی باشد با (ا ج)
(بحکم ش ۶ ۴) بساز بر (س ط) مربع (س ط ق ع) را
پس (بحکم ش ۱۴) (ع س) و (س ط) در یک خط مستقیم خواهند بود ۞
و صل کن (ج ق) و (ق ص) و (ص ب) را
لهذا شکل (ج ق ص ب) مربع میباشند ۞
ثبوت = (ج ا) مساویست با (ط س)
بیفزای بر هر یکی (ا ط) را
پس (ج ط) مساویست با (ا س)
و کذلک خط (ص ع) مساویست با (س د) ۞
لهذا اربعه مستقیمه یعنی (ب ا) و (ج ط) و (ص ع) و (ب د) باهم متساویند ۞
و در مثلثین (ب ا ج) و (ج ط ق) خط (ب ا) مساویست با (ج ط)
و (ا ج) مساویست با (ط ق)
ایضاً زاویهٔ متشکله یعنی (ب ا ج) مساویست با زاویهٔ (ج ط ق)
و هر یکی قائمه میباشد ۞

لهذا

لهذا (بحکم ش ۴) مثلثین (ب اج) و (ج ط ق) از هر حیثیت متساویند.
وکذلك چهار مثلث یعنی (ب اج) و (ج ط ق) و (ص ع ق) و (ب د ص) باهم متساویند
لهذا خطوط مستقیمهٔ (ب ج) و (ج ق) و (ق ص) و (ص ب) باهم متساوی میباشند
یعنی شکل (ج ق ص ب) مربع میباشد)م
ونیز (بموجب مفروضه) زاویهٔ (ج ب ا) مساویست با زاویهٔ (ص ب د)م
بیفزای بر هر یکی زاویهٔ (ا ب ص) را
پس زاویهٔ (ج ب ص) مساویست با زاویهٔ (ا ب د)
لهذا زاویهٔ (ج ب ص) قائمه میباشد
بنابراین (بحکم حد ۳۰) شکل (ج ق ص ب) مربع است
که بر وتر (ب ج) مرتسم گردیده)م
و شکل (ط ق ع س) مساویست با مربع ضلع (ا ج)
پس شکل (ج ق ص ب) مرتسم گردیده است بر شکل غیر منتظم (ا ب ص ق ط)
و بمثلثین (ب اج) و (ج ط ق)
لهذا مربع (ج ق ص ب) مساویست
با مثلثین (ب اج) و (ج ط ق) مع شکل غیر منتظم مذکوره)م
ولکن این اشکال ثلاثه که مذکور شد مشتمل اند بر مربعات (ق ع س ط) و (ا س د ب)
لهذا مربع (ج ق ص ب) مساویست با دو مربع (ق ع س ط) و (ا س د ب)
یعنی مربع مرتسم بر (ب ج) مساویست با دو مربع ضلعین (ج ا) و (ا ب)م

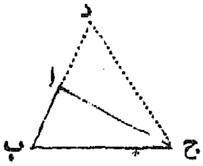
## شکل (۴۸) اثباتی

هرگاه مربع مرتسم بر یك ضلع مثلث مساوی باشد با آن مربعات که بر باقی ضلعین آن مرتسم شوند پس زاویهٔ مشکله این ضلعین قائمه خواهد بود




فرض کن در مثلث (ا ب ج) مربع مرتسم بر ضلع (ب ج)
مساویست با مربع مرتسم بر ضلع (ا ب) و (ا ج)
پس زاویهٔ (ب ا ج) قائمه خواهد بود)م

وضع شکل = (بحکم ش ۱۱) از نقطهٔ (ا) خارج کن خطِ (ا د) را
که با (اج) زاویهٔ قائمه پیدا کند




و (بحکم ش ۳) (ا د) را برابرِ (ب ا) معیّن کن
وصل کن (د ج) را ۔

ثبوت = چونکه (د ا) مساویست با (ب ا)
پس مربعِ (د ا) بمساویِ مربعِ (ب ا) میباشد ۔
از این متساویات بهریکی بیفزای مربعِ (اج) را
پس (بحکم علم ۲) مربعِ (د ا) و (اج) مساوی باشد با مربعِ (اب) ث (اج)
زیراکه زاویهٔ (داج) قائمه مرتسم شده است ۔
لهذا (بحکم ش ۴۷) مجموعهٔ مربع (د ا) و (اج) بمساوی
مربع (دج) میباشد ۔
ولکن (بموجب مفروض) مربع (بج) مساویست با مربعهای
(ب ا) و (اج)
لهذا مربع (دج) بمساویِ مربع (بج) میباشد ۔
بنابراین ضلعِ (دج) برابر است با ضلعِ (بج)
وچونکه ضلعِ (د ا) برابرِ ضلعِ (ب ا) معیّن شده است
و (اج) مشترک است در مثلثین (داج) و (باج)
لهذا ضلعینِ (د ا) و (اج) مساویند با ضلعینِ (ب ا)
و (اج) متوافق با نظائرِ خود ۔

واما در فوق ثابت شد که قاعدهٔ (دج) مساویست با قاعدهٔ بج
لهذا (بحکم ش۸) زاویهٔ (داج) مساوی شد با زاویهٔ (باج)
ولکن زاویهٔ (داج) قائمه میباشد
پس زاویهٔ (باج) نیز قائمه است )م

لهذا مربع مرتسمه بر یک ضلع مثلث الخ
(این شکل عکس شکل ۴۷ میباشد)
(اقلیدس عکس اشکال را برهان خلف ثابت کرده
(ولکن در عکس این شکل ثبوت عینی را بکار برده است

## تفهیم =

(۱) اضلاع مثلث بحسب اعداد هرگاه سه و چهار و پنج باشند
زاویهٔ میان ضلع سه و چهار قائمه خواهد بود )م
مثلاً $3^2 + 4^2 = 16 + 9 = 5^2 = 25$ )م
یعنی مجموعهٔ سه در سه که نه باشد و چهار در چهار که شانزده باشد بیست و پنج است
و ضلع سوم که پنج است انهم پنج در پنج بیست و پنج میباشد )م

(بدانکه محاسبین در علم حساب جهت اختصار علامتی قرار داده اند
مثلاً این ( $^2$ ) علامت یعنی عدد ریزهٔ دو که فوقِ عددِ جلی مرقوم است
مراد اینست که عددِ جلی که تحتانی واقع شده است یک بار در نفسِ خود ضرب شود)
مثلاً سه در سه و چهار در چهار و پنج در پنج )م
واین ( + ) علامت یعنی خطِ عرضی که خط دیگر بران عموداً تقاطع نموده نشانِ
جمع است یعنی عدد ماقبل و مابعد جمع شود )م
واین ( = ) یعنی دو خطِ عرضی که متوازیند نشانِ مساوات است یعنی عدد یا اعداد
ماقبل مساوی عدد یا اعدادِ مابعد است )م
مثلاً سه مضروب در نفسِ خود مع چهار مضروب در نفسِ خود مساوی شانزده
مع نه که مساویست با پنج مضروب در نفسِ خود )م
(۲) متقدمین قواعدی چند برای دریافت نمودنِ عددِ صحیح
که از ان اعدادِ صحیحهٔ اضلاعِ مثلثِ قائم الزاویه تعبیر باشد بیان نموده اند
بعضی از ان قواعد در اینجا مذکور میشود )م

## قاعدهٔ فیثاغورس

(۱) هر عددِ طاق را که میخواهی برای یک ضلعِ مثلث فرض کن
(۲) از مربع عدد مفروض عدد یک را تفریق نما و نصف باقی را برای ضلع دوم اختیار کن
(۳) بر مربع عدد مفروض عدد یک را اضافه کن و نصفِ مجموعه را اختیار کن که ضلع سوم تعبیر از انست
یعنی اضلاع ثلاثه که ازین قسم تحصیل شود تعبیر کنند مثلثِ قائم الزاویه را
مثلاً عدد پنج را فرض کن که یک ضلع میباشد
پس $\frac{1}{2}(25-1) = 12$ ایضاً $\frac{1}{2}(25+1) = 13$
لهذا عددِ ۵ و ۱۲ و ۱۳ عدد مطلوبست
زیراکه $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 13^2$ میباشند
این $\frac{1}{2}$ علامت که عددی فوق خط عرضی و عددی تحتِ آن مرقوم است نشانِ تنصیف است یعنی یک قسمت از مقداریکه تقسیم در دو قسمت شده است
واین (۲۵—۱) علامت دلالت کند براینکه نتیجهٔ جملهٔ اعدادیکه میانِ قوسین محدود است محکوم است بعلایم ماقبل ومابعد خود مثلاً در فقرهٔ اول مراد اینست که نصفِ جملهٔ قوسیه مساویست با دوازده
واین (—) علامت یعنی خط ریزهٔ عرضی نشانِ تفریق است یعنی علامت بعد یا اینکه عدد کوچک از عدد بزرگ تفریق شود
چنانچه در فقرهٔ اول از عددِ ۲۵ که یک تفریق شود نصفِ باقی دوازده باشد

## قاعدهٔ افلاطون

(۱) هر عددِ جفت را که میخواهی برای یک ضلع فرض کن
(۲) از مربع نصفِ عددِ مفروض عدد یک را تفریق کن
(۳) بر مربع نصفِ عددِ مفروض عدد یک را اضافه کن
پس عددِ مفروض و اعداد دیگر این قسم حاصل شود تعبیر نماید مثلثِ قائم الزاویه را
مثلاً عدد شش را برای یک ضلع اختیار کن
پس $3^2 - 1 = 8$
و $3^2 + 1 = 10$
لهذا عدد ۶ و ۸ و ۱۰ عدد مطلوب است
زیراکه $6^2 + 8^2 = 64 + 36 = 100 = 10^2$ میباشند

## قاعدهٔ متداوله

(۱) هر قسم دو عدد و اگر میخواهی فرض کن که از یک جنس نباشد
و مجموعهٔ مربع هر دو را دریافت کن که یک ضلع خواهد بود
(۲) فرق مربعات مذکوره را پیدا کن که ضلع دیگر خواهد بود
(۳) حاصل ضرب دو عدد مفروضه را مضاعف کن که ضلع سوم است ۔

مثلاً عدد ۴ و ۵ را فرض کن ۔

پس $۴^۲ + ۵^۲ = ۴۱$ ۔

و $۵^۲ - ۴^۲ = ۹$ ۔

و $۴ × ۵ × ۲ = ۴۰$ ۔

لهذا اضلاع مثلث مطلوب ۹ و ۴۰ و ۴۱ میباشند ۔

این ( × ) علامت یعنی دو خط متقاطع حمائلی نشان ضرب است ۔
یعنی مقدار ما قبل در مقدار ما بعد ضرب شود حاصل ضرب
باز در مقدار ما بعد خود ضرب شود ۔
مثلاً ۴ ضرب در ۵ حاصل ۲۰ و باز ضرب در ۲ حاصل ۴۰ میباشد

در اینجا توضیح علائم حسابیه زیاده از این لازم نیست
و اینهم که ذکر شد محض برای تشویق مبتدیان بسوی علم حساب مرقوم افتاده ۔

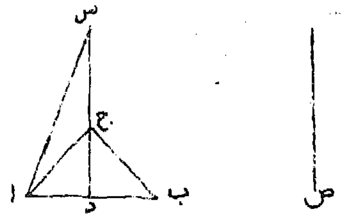
## اسلوب تحلیلی و ترکیبی

مراد اینست که چون خواسته باشیم خواص شکلی را دریافت نمائیم
طریقه که برای این عمل بکار رود آنرا اسلوب تحلیلی گویند
و آن اینست که برای حصول مدعا دعوی شکل را در ابتدا ثابت فرض کنیم
و در آخر بدلائل مسلسل متعدده نتیجه را استنباط نمائیم
و می بینیم که آن نتیجه مطابق است با یکی از آن نتائج که تاکنون بیراهین ثابت شده اند
یا نیست
اگر هست پس تصدیق دعوی ثابت و الّا باطل است
و ثانیاً هرگاه موافق آن نتائج که بتحقیقات خود ما ثابت شده اند
خواسته باشیم شکلی بنا کنیم
پس این عمل را اسلوب ترکیبی گویند
و آن اینست که در اثبات شکل از ابتدا نتائج مثبته را بکار بریم
و از این عمل شکل نوی مرتسم خواهد گردید ۔

بدان چونکه حل این مقاصد موقوفست بر ذهانت و کثرت مشق مبتدی
لهذا در این باب زیاده از این هدایات لازم نباشد ۔

## اسلوب تحلیلی

مثلث متساوی الساقین که قاعدهٔ آن معلوم باشد
و نیز مجموعهٔ یک ساق مع آن عمود که از راس بر قاعده خارج شود معلوم باشد




فرض کن (اب) قاعدهٔ معلوم و (ص) مجموعهٔ یک ساق
مع آن عمود که از راس بر قاعده خارج شود میباشد
برای حصول مدعا تصدیق کن که (ا ب ج) مثلث مطلوب است
از (ج) خارج کن بر (ا ب) عمود (ج د) را
پس (ا ب) بر نقطهٔ (د) تنصیف خواهد شد
و سرکاه (د ج) تا نقطهٔ (س) خارج شود
فمیکه (ج س) بمساوی (ا ج) باشد و (ا س) را وصل نمائیم
پس (بحکم شـ ۵) زاویهٔ (ج ا س) بمساوی زاویهٔ (ج س ا) خواهد بود
اکنون ملاحظه کن پیش از انکه مقام ج معلوم باشد
خط مستقیم (د س) و (ا س) را توان خارج نمود
لهذا از این عمل روش راست مثلث معلوم شد
یعنی هرگاه نتیجهٔ عمل موافق سؤال واقع نمیشد تصدیق باطل بود
حال همین مطلب را باسلوب ترکیبی بیان کنیم

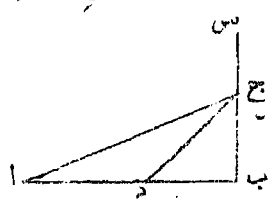
## اسلوب ترکیبی

تنصیف کن (ا ب) را بر نقطهٔ (د)
از نقطهٔ (د) خارج کن عمود (د س) را
(د س) را برابر (ص) معین کن
و وصل کن (ا س) را
در (س ا) بر نقطهٔ (ا) بساز زاویهٔ (س ا ج) را که بمساوی (ا س د) باشد
و وصل کن (ج ب) را
پس (ا ج ب) مثلث مطلوب میباشد
زیراکه (بحکم شـ ۳) مثلث مذکور متساوی الساقین است
یعنی (ا ج) بمساوی (ب ج) است
چونکه زاویهٔ (س ا ج) بمساوی (ا س ج) میباشد
لهذا (س ج) مساویست با (ا ج)

بیفزای بریکی ازاین متساویات (ج د) را
پس مجموعهٔ (اج) و (ج د) مساویست با مجموعهٔ (س ج) و (ج د)
که مساویست با (س د)
یعنی مجموعهٔ (اج) و (ج د) بمساوی (ص) میباشد۔

## ایضاً اسلوب تحلیلی

خط مستقیم معلوم را در دو قسمت چنان تقسیم کن که مربع یک قسمت دوچند باشد نسبت بمربع قسمت ثانی۔




فرض کن (اب) خطِ مستقیم معلوم است
برای حصول مدّعا قبول کن در (اب) تقسیمیکه مطلوبست در نقطهٔ (د) شده
یعنی مربع (اد) دوچنداست نسبت بمربع (د ب)
اکنون بخاطر بیاور که در مثلثِ قائمة الزاویه متساوی الساقین
مربع وتر دوچنداست نسبت بمربع یک ضلعِ آن
لهذا ازین ظاهر میشود که بر (اب) عمود (ب ج) قائم کنیم
قسمیکه (ب ج) بمساوی (ب د) باشد و (د ج) را وصل نمائیم
پس (بحکم ش ۴۷) مربع (د ج) دوچنداست نسبت بمربع (د ب)
لهذا (د ج) بمساوی (اد) خواهد بود۔ هرگاه نباشد تصدیق دعوی باطل است۔
هرگاه (اج) را موصول سازیم معلوم شود
که زاویهٔ (داج) مساویست با زاویهٔ (دج ا)
پس (بحکم ش ۳۲) زاویهٔ خارجهٔ (ج د ب) دوچنداست نسبت به (داج)
لکن زاویهٔ (ج د ب) نصف قائمه میباشد
لهذا زاویهٔ (داج) ربع قائمه است۔

## ایضاً اسلوب ترکیبی

بر (اب) از نقطهٔ (ب) خارج کن عمود (ب س) را
و از (ا) خارج کن (اج) را
قسمیکه زاویهٔ (ب اج) بمساوی ربع قائمه باشد۔

برنقطهٔ تقاطع (اج) و (ب ج) بساز زاویهٔ (اج د) را
که برابر باشد با زاویهٔ (ج ا د)
لهذا تقسیم (اب) چنانکه منظور است بر نقطهٔ (د) خواهد بود
زیرا که زاویهٔ (د ج ا) مساویست با زاویهٔ (د ا ج)
لهذا (بحکم ش ۵) (د ا) برابر است با (د ج)
ایضاً چونکه (بحکم ش ۳۲) زاویهٔ (ب د ج) مساویست
با مجموعهٔ زاویتین (ب ا ج) و (ا ج د)
لهذا (ب د ج) نصف قائمه میباشد
و چونکه زاویهٔ (ب) قائمه میباشد
پس (بحکم ش ۳۲) (ب ج د) هم نصف قائمه است
بنابراین زاویهٔ (ب د ج) برابر است با زاویهٔ (ب ج د)
لهذا (ب د) مساویست با (ب ج)
از این بیان واضح شود که مربع مرتسم بر (د ج)
(بحکم ش ۴۷) دو چند است نسبت بمربع (د ب)

یعنی مربع مرتسم بر (ا د) دو چند است نسبت بمربع (د ب)

## مساوات متحدهٔ مثلثات

### مشق =

(۱) هرگاه در مثلثی از راس بر قاعدهٔ آن عمود خارج شود و تنصیف قاعده نماید
آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود
(۲) هرگاه خط منصف زاویهٔ راس مثلث بر قاعده عمود باشد
آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود
(۳) هرگاه خط منصف زاویهٔ راس مثلث قاعده را نیز تنصیف نماید
آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود

(خط تنصیف کنندهٔ خارج کن و بساز شکل ۱۶ د ۱)
(۴) هرگاه از اطراف قاعدهٔ مثلث یک زوج خطوط خارج شده باشد
و با اضلاع مثلث زوایای متساویه تشکیل نماید و باهم برابر باشند
پس آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود
(۵) هرگاه در مثلثی از اطراف قاعده عمائد بر اضلاع خارج شده
باهم متساوی باشند
آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود
(۶) بر یک قاعدهٔ (اب) و بر جهات مخالف دو مثلث (ا ب ج) و (ا ب د)
چنان واقع شده اند که (اج) برابر است با (ا د) و (ب ج) با (ب د)

پس

پس ثابت کن خطی که واصل (ج د) است بر (ا ب) عمود خواهد بود ›
(۷) هرگاه از اطراف قاعدهٔ مثلثِ متساوی الساقین
بر اضلاعِ متقابل عمائد خارج شوند
پس خطی که از نقطهٔ تقاطعِ عمائد بر راس مثلث واصل شود
زاویهٔ راس را تنصیف خواهد نمود ›
(۸) (ابج) مثلثی است که زاویهٔ راس آن (ب ا ج) از خط (ا د) تنصیف شده است
و بر (ا د) از نقطهٔ (ب) عمودِ (ب س) خارج شده است
و چنان ممتد شده که با (ا ج) یا (ا ج) ممدوده در نقطهٔ (ص) موصول شده
ثابت کن (ب س) مساوی (س ص) است ›
(۹) (ا ب ج د) ذو اربعة الاضلاعی است و (ا ب) برابر است با (ا د) و (ب ج) با (د ج)
پیدا کن شکل را و ثابت کن
که خط (ا ج) تنصیف میکند آن زوایا را که با آنها موصول شده است
برخلاف خط (ب د) که تنصیف نکند ›
(۱۰) در ذو اربعة الاضلاع (ا ب ج د) اضلاع مقابل یعنی (ا د) و (ب ج) متساویند
و اوتار یعنی (ا ج) و (ب د) هم متساوی
پس هرگاه (ا ج) و (ب د) در نقطهٔ (س) تقاطع نمایند
ثابت کن که مثلثین (ا س ب) و (د س ج) متساوی الساقین میباشند ›
(۱۱) در مثلثی هرگاه مجموعهٔ دو زاویه مساوی باشد با زاویهٔ سوّم
پس ضلعیکه اعظم است دو چند خواهد بود نسبت بخطیکه از نقطهٔ وسط آن (نصف ضلع)
تا زاویهٔ مقابل خارج شود ›
(۱۲) در دو مثلث قائم الزاویه که اوتار آن باهم متساوی باشند
و نیز یک ضلع یک مثلث مساوی باشد با یک ضلع مثلث دیگر
ثابت کن که سطوح هر دو باهم متساویند ›

## غیر مساوات

(۱۳) در مثلث (ا ب ج) هرگاه (ا ج) اطول نباشد نسبت به (ا ب)
ثابت کن خطی که از راس (ا) بر قاعدهٔ (ب ج) خارج شود
اقصر خواهد بود نسبت بخطِ (ا ب)
(۱۴) در مثلث (ا ب ج) زاویهٔ (ب ا ج) از خطِ مستقیم (ا د) تنصیف میشود
ثابت کن (ب ا) اطول است نسبت به (ب د) و (ج ا) نسبت به (ج د)
(۱۵) از یک نقطهٔ هر قدر خطوط تا بخطِ مستقیمی خارج شوند
در آنها خطِ عمود از همه اقصر خواهد بود
و در آن خطوطِ مستقیمه که خارج میشوند
خطیکه اقرب بعمود است اقصر است نسبت بخطیکه ابعد واقع میشود
و نیز غیر ممکن است در این خطوط زیاده از دو خطِ متساوی یافته شود

که هر یکی از این دو در یک جانب عمود خواهد بود ۞

(۱۶) نقطهٔ که در مثلث واقع میشود مجموعهٔ ابعاد ثلاثهٔ آن تا زوایای مثلث زیاده است از نصف مجموعهٔ اضلاع آن و کمتر است از مجموعهٔ آن ۞

(۱۷) مجموعهٔ اضلاع شکل ذو اربعة الاضلاع زیاده است از اوتار آن ۞

(۱۸) مجموعهٔ اوتار ذو اربعة الاضلاع اقصر است نسبت بمجموعهٔ خطوط اربعه که از یک نقطه معلومه تا زوایای آن خارج شوند

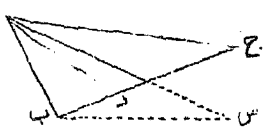
(۱۹) مجموعهٔ ذو ضلع مثلث اطول است نسبت بدو چند خط متوسط که تنصیف کند ضلع سوم را ۞

(۲۰) در هر مثلث مجموعهٔ اضلاع اطول است از مجموعهٔ خطوط متوسطهٔ آن ۞

(۲۱) در مثلثات که خطوط منصّف زوایا بر ضلع مقابل میرسند
اوّل = منصّف زاویهٔ حادّه اطول از نصف ضلع مقابل ۞
دوم = منصّف زاویهٔ منفرجه اقصر است از نصف ضلع مقابل ۞
سوم = در مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین
منصّف زاویهٔ قائمه برابر است با نصف ضلع مقابل ۞

(۲۲) اقطار معین متساوی نباشند ۞

(۲۳) زاویهٔ راس مثلث که مابین اضلاع غیر متساوی واقع باشد هرگاه از راس آن خط متوسط و خط منصّف خارج شوند پس خط متوسط مابین ضلع اطول و خط منصّف واقع خواهد شد




مثلاً در مثلث (ا ب ج) خط متوسط (ا س) و خط منصّف (ا د) میباشد

(۲۴) زاویهٔ راس مثلثی که مابین ضلعین غیر متساوی واقع شود هرگاه از آن زاویه سه خط خارج شوند
یعنی خط منصّف و خط متوسط و سوم عمود بر قاعده
پس اوّلی در مقدار و مقام مابین هر دو خواهد بود ۞

(در متساوی الساقین هر سه منطبق شوند)

## خطوط متوازی و متوازی الاضلاع

(۲۵) هرگاه بر دو خط مستقیم متوازی خط مستقیمی واقع شود ۞

وزوایای داخلهٔ یکجهت آن تنصیف شوند
پس خطوط منصّف زوایا بر قائمه تقاطع خواهند نمود ۞

(۲۶) خطیکه تنصیف زاویه میکند هرگاه از یک نقطهٔ آن
خطوط مستقیمهٔ متوازی با اضلاع و تا اضلاع خارج شوند
از خروج آن شکل معین یا مربع تشکیل خواهد یافت ۞

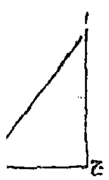
(۲۷) خط (اب) را (ج د) در نقطهٔ (د) قطع میکند
زوایای هردو جانب تنصیف شده اند
پس هرگاه در (دج) از یک نقطه مثلاً (س) خط (ص س ط)
متوازی (اب) خارج شود
و با خطوط منصّفه در (ص) و (ط) وصل شود
ثابت کن (س ص) و (س ط) باهم متساویند ۞

(۲۸) هرگاه با خطوط مستقیم متوازی خط مستقیم دیگر موصول شود
نقطهٔ وسط آن با خطوط متوازیه بر فاصلهٔ متساوی خواهد بود ۞

(۲۹) ا ب ج مثلث متساوی الساقین است
خط (د س) را متوازی (ب ج) چنان خارج کن
که با اضلاع متساویه بر نقطهٔ (د) و (س) موصول شود
و (ب د) و (د س) و (س ج) باهم متساوی باشند ۞

(۳۰) (اب) و (ج د) دو خط مستقیمند و در (اب) نقطهٔ (س) معلوم است
ولکن نقطهٔ در آن مثلاً (ص) پیدا کن
که فاصله (ص س) مساوی باشد با عمود یکه از (ص) بر (ج د) خارج شود

(۳۱) هرگاه از نقطهٔ وسط ضلع مثلث خط متوازی با قاعده خارج شود
آن خط ضلع دیگر را هم تنصیف خواهد نمود ۞




(۳۲) خط مستقیمیکه نقاط وسط ضلعین مثلث را وصل دهد
مساوی نصف ضلع سوم خواهد بود ۞

(۳۳) در نقاط وسط اضلاع مثلث خطوط ثلاثه که موصول شوند
مثلث را در چهار مثلث متساوی تقسیم خواهند نمود
که از هر حیثیت باهم متساوی باشند ۞

(۳۴) خط مستقیمیکه از راس مثلث تا قاعده خارج شود
تنصیف خواهد شد از خطی که نقاط وسط باقی ضلعین را وصل نماید

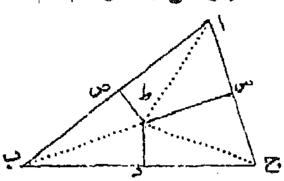
(۳۵) در شکل ذوزنقه خطی که نقاط وسط اضلاع غیر متوازیه را وصل دهد

متوازی خواهد بود با اضلاع متوازیهٔ آن
واز نقطهٔ وسط اوتار خواهد گذشت ٭

(۳۶) در شکل ذوزنقه خطی که نقاط وسط اضلاع غیر متوازیه آنرا وصل نماید
بمساوی نصف مجموعهٔ ضلعین متوازیهٔ آن خواهد بود
وفرق حصص آن که مابین وترین واقع شوند
بمساوی نصف فرق ضلعین متوازیه خواهد بود ٭

# تعریف خطوط مشترک النقطه در مثلثات

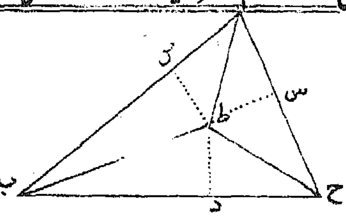
(۱) عمائد یکه از نقاط وسط اضلاع مثلث خارج شوند مشترک النقطه میباشند
یعنی در یک نقطه موصول شوند ٭




فرض کن مثلث (اب ج) را نقاط وسط (د) و(س) و (ص) است
پس عمائد یکه بر نقاط مذکوره قائم شوند مشترک النقطه خواهند بود ٭
وضع شکل = بر (اب) و (اج) از نقطه (ص) و(س) خارج کن عمائد را
چونکه غیر ممکن است عمائد مذکوره متوازی باشند لابد در یک نقطهٔ مثلاً
(ط) موصول خواهند شد ٭
وصل کن (ط د) را
پس (ط د) بر (ب ج) عمود خواهد بود ٭
وصل کن (ط ا) و (ط ب) و (ط ج) را
ثبوت = چونکه در مثلثین (ط س ا) و(ط س ج) ضلع (س ا) بمساوی
(س ج) است
و (س ط) مشترک در هر دو
و زاویهٔ (ط س ا) مساوی بازاویه (ط س ج) زیراکه هریکی قائمه میباشد
لهذا (بحکم ش ۸) ضلع (ط ا) مساوی است با ضلع (ط ج)
وبهمین تفصیل در مثلثین (ط ص ا) و (ط ص ب) ثابت توان نمود که (ط ا)
برابر است با (ط ب)

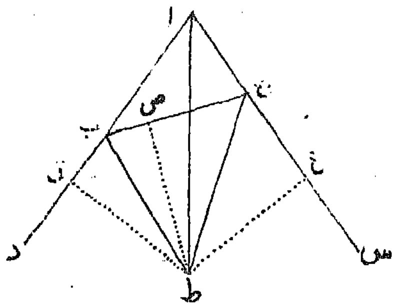
ازاین بیان معلوم شد که (طا) و (طب) و (طج) باهم متساویند
پس چونکه (د) نقطهٔ وسط است در ضلع (ب ج)
و نیز چونکه در مثلث متساوی الساقین خطیکه از راس بنقطهٔ وسط قاعده برسد بران عمود میباشد
لهذا عمائد ثلاثه یعنی (ط د) و (طس) و (طص) بر نقطهٔ (ط) موصول میشوند
و مقصود همین ثبوت بوده است) م

## (۲) خطوط منصفهٔ زوایا مثلث بیک نقطه مشترک میباشند




فرض کن در مثلث (ا ب ج) زاویتین (ا ب ج) و (ب ج ا) از خطوط مستقیم که در نقطهٔ (ط) موصولند تنصیف میشوند
وضع شکل = وصل کن (ط ا) را
فعلاً باید ثابت کنیم که (ا ط) تنصیف میکند زاویهٔ (ب ا ج) را
بر اضلاع مثلث از نقطهٔ (ط) خارج کن عمائد (ط د) و (طس) و (طص) را
ثبوت = چونکه در مثلثین (ط ب د) و (ط ب ص) زاویهٔ (ط ب د) مساوی است با زاویهٔ (ط ب ص)
و زاویهٔ (ط د ب) مساوی با زاویهٔ (ط ص ب) زیراکه هر یکی قائمه میباشد
و ضلع (ط ب) در هر دو مشترک
پس (بحکم ش ۲۶) ضلع (ط د) برابر است با (طص)
همین طور در مثلثین (ط ج د) و (ط ج س) ثابت توان نمود که ضلع (ط د) برابر است با (طس)
پس (ط د) و (طس) و (طص) باهم متساویند
و چونکه در مثلثین (طص ا) و (طس ا) زاویتین (طص ا) و (طس ا) باهم متساویند
زیراکه هر یکی قائمه میباشد و وتر (ط ا) مشترک در هر دو
و (طص) مساوی (طس)
لهذا (بحکم ش ۲۶) زاویهٔ (ص ا ط) مساویست با زاویهٔ (س ا ط)
یعنی زاویهٔ (ب ا ج) را خط (ط ا) تنصیف میکند
بنابراین در هر مثلث منصفهٔ زوایا در یک نقطه مثلاً (ط) موصول میشوند) م

(۳) در هر مثلّث خطوطِ منصّفهٔ دو زاویهٔ خارجه و یك زاویهٔ داخله
مشترك النّقطه میباشند



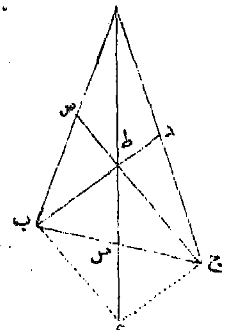

فرض کن در مثلّث (ا ب ج) ضلعین (ا ب) و (ا ج) تا نقطهٔ (د) و
(س) ممتد شده اند
و زوایای خارجه یعنی (د ب ج) و (س ج ب) را خطوط مستقیمه تنصیف
نموده در نقطهٔ (ط) موصول شده اند ✓

وضع شکل = وصل کن (ا ط) را
حال باید ثابت شود که زاویهٔ (ب ا ج) را خطِ (ا ط) تنصیف میکند
بر اضلاع مثلث از نقطهٔ (ط) خارج کن عماید (ط ص) و (ط ع) و
(ط ق) را

ثبوت = چونکه در مثلّثین (ط ب ص) و (ط ب ق) زاویهٔ (ط ب ص)
مساویست با زاویهٔ (ط ب ق)
و نیز زاویهٔ (ط ص ب) مساویست با زاویهٔ (ط ق ب) زیراکه هر یکی
قائمه میباشد
و (ط ب) در هر دو مشترك
لهذا (بحکم ش ۲٦) ضلع (ط ص) مساویست با (ط ق)
همین قسم ثابت میشود که در مثلّثین (ط ج ص) و (ط ج ع) ضلع (ط ص)
برابر است با (ط ع)
پس (ط ص) و (ط ع) و (ط ق) باهم متساویند ✓
و چونکه در مثلّثین (ط ق ا) و (ط ع ا) زاویهٔ (ا ق ط) مساویست با زاویهٔ
(ا ع ط) زیراکه هر یکی قائمه میباشد
و نیز (ط ا) مشترك است و ضلع (ط ق) برابر با ضلع (ط ع)
لهذا (بحکم ش ۲٦) زاویهٔ (ق ا ط) مساویست با زاویهٔ (ع ا ط)
یعنی زاویهٔ (ب ا ج) را خطِ (ا ط) تنصیف مینماید
بنا برین خطوط منصّفهٔ زوایا یعنی (ب ط) و (ا ط) و (ج ط) در یك نقطه
موصول شده اند
و تنصیف نموده اند دو زاویهٔ خارجه و یك زاویهٔ داخله را ✓

یعنی زاویهٔ (د ب ج) و (س ج ب) و (ب ا ج) را ه‍

## (۴) خطوط متوسّطه در هر مثلث مشترک النقطه میباشند




فرض کن (ا ب ج) مثلّث و دو متوسّط آن (ب د) و (ج س) است که بر نقطهٔ (ط) متقاطع میباشند

وضع شکل = وصل کن (ا ط) را و خارج کن از اقسمیکه رد (ب ج) بر نقطهٔ (ص) برسد ه‍

پس متوسّط سوّم (ا ط) خواهد بود ه‍

ایضًا از نقطهٔ (ج) خارج کن (ج ع) را که متوازی باشد با (د ب) و ممتد ساز (ا ص) را که در نقطهٔ (ع) با خط (ج ع) موصول شود

و وصل کن (ب ع) را

ثبوت = چونکه در مثلّث (ا ع ج) ضلع (ا ج) را نقطهٔ وسط (د) است

و (ج ع) متوازی است با (د ط)

لهذا (ط) نقطهٔ وسط (ا ع) است = ببین در صفحه ۱۳۷ سؤال ۳۱ را ه‍

ایضًا چونکه در مثلّث (ا ب ع) ضلعین (ا ب) و (ا ع) را نقاط وسط (س) و (ط) است

لهذا (ب ع) متوازی (ط ع) خواهد بود ه‍ (ببین در صفحه ۱۳۷ سؤال ۳۱) ه‍

یعنی (ط ج) متوازی (ب ع) است

بنابراین (ب ع ج ط) متوازی الاضلاع میباشد ه‍

و چون اقطار متوازی الاضلاع یکدیگر را تنصیف میکنند

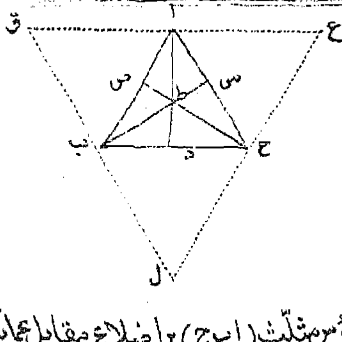
لهذا (ص) نقطهٔ وسط ضلع (ب ج) است

یعنی (ا ص) متوسط مثلث (ا ب ج) است
پس ثابت شد کہ دو مثلث ہر سہ متوسط در یك نقطہ موصول میشوند ۔

# نتیجۂ صحیح

در مثلث ہر سہ متوسط یکدیگر را در نقطۂ مشترکہ تثلیث مینمایند ۔
وقیمت اطول ان بطرف زاویہ میباشد
مثلاً در شکل فوقانی ثابت شد کہ (ا ط) مساویست با (ط ع)
و چونکہ (ط ص) نصف (ط ع) است
پس (ط ص) نصف (ط ا) ہم میباشد
یعنی (ط ص) یك ثلث (ا ص) است ۔
بہمین ترتیب ثابت میشود کہ (ط د) یك ثلث (ب د) و (ط س)
یك ثلث (س ج) است
ایضاً ازاین عمل منتج و مستفاد میشود
کہ متوسط اقصر ضلع اطول را تنصیف مینماید ۔
بدانکہ نقطۂ تقاطع خطوط متوسط را مرکز ثقل مثلث گویند ۔
چنانکہ در دائرہ و کرات نقطہ وسط را مرکز تفتل نامند
زیراکہ دراین نقطۂ مفیدہ کہ شرح ان کثیراست اجزای اجسام
تعادل دارند ۔

## (۵) ہرگاہ از رؤس مثلث (مثلث حادّ الزوایا) بر اضلاع مقابل عمائد خارج شوند مشترك النقطہ خواہند بود




فرض کن از رؤس مثلث (ا ب ج) بر اضلاع مقابل عمائد (ا د) و (ب س)
و (ج ص) خارج شدہ اند ۔
پس ہر سہ عمائد دریك نقطہ مثلاً (ط) موصول خواہند شد ۔

وضع شکل = از نقطهٔ (ا) و (ب) و (ج)
خارج کن (ع ق) و (ق ل) و (ل ع) را
که هریکه متوازی باشد با اضلاع مقابل
یعنی (ع ل) متوازی باشد با (ا ب) و (ق ل) با (ا ج) و (ق ع) با (ب ج)
پس بحکم (ش ۳۴) (ا ب ج ع) متوازی الاضلاع میباشد
زیراکه (ا ب) متوازی (ع ج) است)
ایضاً شکل (ا ب ل ج) متوازی الاضلاع است
زیراکه (ا ب) متوازی (ل ج) است
پس (ل ج) مساوی است با (ج ع)
یعنی (ج) نقطهٔ وسط (ل ع) است)
وکذلک (ا) و (ب) نقاط وسط‌اند ضلعین (ع ق) و (ق ل) را
بنابراین بر اضلاع مثلث (ل ع ق) از نقاط وسط عمائد (ا د) و (ب س) و
(ص ج) خارج شده‌اند (یعنی شکل اوّل خطوط مشترکه النقطه را)
پس در شکل مذکوره هر سه عمود بریک نقطه یعنی (ط) موصول خواهند شد
یعنی از زوایای مثلث (ا ب ج) عمائدیکه بر اضلاع مقابل خارج شده‌اند
دریک نقطه موصول میشوند)
بدانکه در مثلث منفرج الزاویه نقطهٔ راسیه یعنی نقطهٔ مشترکهٔ عمائد بیرون
از شکل واقع میشود یعنی بر اضلاع ممدوده
ودر مثلث قائم الزاویه بر نقطهٔ قائمه واقع شود
که هریکه دو عمود بر اضلاع منطبق شوند)

**تفهیم** = هرکه مبتدی خواسته باشد بهره از علوم حاصل نماید خاصّه از علم هندسه
لازم است که همّت وشوق خود را معلّم خود قرار دهد — اشکال فرضی بسازد
ومتحمل نماید)
زیراکه در هرکاری قائد شوق است که لشکر مقاصد را بمنزل مقصود میرساند

والسّلام علی خیر الانام